



المركز الوطني
لتطوير المناهج والتقييم
National Center
for Curriculum Development and Evaluation



الرياضيات

الصف العاشر - كتاب الطالب

الفصل الدراسي الأول

10

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيساً)

يوسف سليمان جرادات إبراهيم عقله القادري هيثم زهير مرشود

نقین أحمد جوهر (منسقاً)

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج والتقييم

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج والتقييم استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

☎ 06-5376262 / 237 📠 06-5376266 ✉ P.O.Box: 2088 Amman 11941

📌 @nccdjor 📧 feedback@nccd.gov.jo 🌐 www.nccd.gov.jo

قرّرت وزارة التربية والتعليم تدرّيس هذا الكتاب في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها، بناءً على قرار المجلس الأعلى للمركز الوطني لتطوير المناهج والتقويم في جلسته رقم (2020/4)، تاريخ 2020/6/11 م، وقرار مجلس التربية والتعليم رقم (2020/56) تاريخ 2020/6/24 م بدءاً من العام الدراسي 2020 / 2021 م.

© HarperCollins Publishers Limited 2020.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development and Evaluation.
Amman - Jordan

- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development and Evaluation. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 360 - 9

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2022/4/2051)

375.001

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

الرياضيات: الصف العاشر: كتاب الطالب (الفصل الدراسي الأول) / المركز الوطني لتطوير المناهج. - ط2؛ مزيدة

ومنقحة. - عمان: المركز، 2022

(132) ص.

ر.إ.: 2022/4/2051

الواصفات: / الرياضيات // التعليم الاعدادي // المناهج /

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, sorted in retrieval system, or transmitted in any form by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise, without the prior written permission of the publisher or a license permitting restricted copying in the United Kingdom issued by the Copyright Licensing Agency Ltd, Barnard's Inn, 86 Fetter Lane, London, EC4A 1EN.

British Library Cataloguing -in- Publication Data

A catalogue record for this publication is available from the Library.

1441 هـ / 2020 م

1447 هـ / 2026 م

الطبعة الأولى

الطبعة الثانية

المقدمة

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على أشرف الأنبياء والمرسلين، وبعد؛ فانطلاقاً من إيمان المملكة الأردنية الهاشمية الراسخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ سعى المركز الوطني لتطوير المناهج والتقويم، بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم، إلى تحديث المناهج الدراسية وتطويرها، لتكون معيماً على الارتقاء بمستوى الطلبة المعرفي، ومجاراة الأقران في الدول المتقدمة. ولما كانت الرياضيات إحدى أهم المواد الدراسية التي تنمي لدى الطلبة مهارات التفكير وحلّ المشكلات، فقد أولى المركز هذا المبحث عنايةً كبيرةً، وحرص على إعداد كتب الرياضيات وفق أفضل الطرائق المُتبَّعة عالمياً على أيدي خبرات أردنية؛ لضمان انسجامها مع القيم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لحاجات طلبتنا.

وروعي في إعداد كتب الرياضيات تقديم المحتوى بصورة سلسلة، ضمن سياقات حياتية شائقة، تعزز دافعية الطلبة نحو التعلم. وتمّ التأكيد على توظيف التكنولوجيا بشكل حصيف بوصفها أداة فاعلة في بناء المفاهيم الرياضية وتطوير المهارات التقنية لدى الطلبة، كما احتوت الكتب على أنشطة مفاهيمية تُسهم بشكل فاعل في استكشاف المفاهيم الرياضية لدى الطلبة وتعميق فهمهم لها. وقد احتوت الكتب على مشروع لكل وحدة؛ لتعزيز تعلّم الطلبة المفاهيم والمهارات الواردة فيها وإثرائها، ولأن التدريب المكثّف على حلّ المسائل يُعدّ إحدى أهم طرق ترسيخ المفاهيم الرياضية وزيادة الطلاقة الإجرائية لدى الطلبة؛ فقد أعدّ كتاب التمارين على نحو يقدّم للطلبة ورقة عمل في كل درس، تُحلّ بعضها واجباً منزلياً، أو داخل الغرفة الصفية إن توافر الوقت الكافي. ولأننا ندرك جيداً حرص الكوادر التعليمية الأردنية على تقديم أفضل ما لديها للطلبة؛ فقد جاء كتاب التمارين أداةً مساعدة توفّر عليها جهد إعداد أوراق العمل وطباعتها.

وانطلاقاً من أهمية الاتساق والتتابع في بناء تعلّم الرياضيات، روعي في إعداد هذا الكتاب أن يكون جزءاً من بنية منهجية موحّدة تمتد عبر الصفوف الدراسية المتتابعة، بحيث تتدرّج المفاهيم والمهارات بصورة مترابطة ومنظمة، وتبنى الخبرات الجديدة على ما سبقها من تعلّم. ويهدف هذا التنظيم إلى ضمان سلاسة انتقال الطلبة بين الصفوف، وتعزيز الفهم العميق للمفاهيم، وتجنّب التكرار غير المُبرّر أو الفجوات المعرفية، بما يسهم في تحقيق نمو رياضي متوازن ومتراكم لدى الطلبة.

ونحن إذ نُقدّم هذا الكتاب، نأمل أن ينال إعجاب طلبتنا والكوادر التعليمية الأردنية، ويجعل تعليم الرياضيات وتعلّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونعد بأن نستمرّ في تحسين هذا الكتاب في ضوء ما يصلنا من ملاحظات.

المركز الوطني لتطوير المناهج والتقويم

قائمة المحتويات

6	الوحدة ① المعادلات
7	مشروع الوحدة: أنظمة المعادلات في حياتنا
8	الدرس 1 حلُّ مُعادلاتٍ خاصَّةٍ
16	معملٌ برمجيٌّ جيو جبراً: حلُّ أنظمةِ المعادلاتِ بيانياً
18	الدرس 2 حلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ من معادلةٍ خطيةٍ ومعادلةٍ تربيعيةٍ
25	الدرس 3 حلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ من معادلتينِ تربيعيتينِ
31	اختبارُ نهايةِ الوحدة
32	الوحدة ② الدائرة
33	مشروعُ الوحدة: استعمالاتٌ علميةٌ لخصائصِ الدائرة
34	الدرس 1 أوتارُ الدائرة، وأقطارُها، ومماسَّاتها
41	الدرس 2 الأقواسُ والقطاعاتُ الدائريةُ
47	الدرس 3 الزوايا في الدائرة
54	الدرس 4 معادلةُ الدائرة
62	اختبارُ نهايةِ الوحدة

قائمة المحتويات

64	الوحدة 3 حساب المثلثات
65	مشروع الوحدة: إنشاء نظام إحداثي جديد
66	الدرس 1 النسب المثلثية
74	الدرس 2 النسب المثلثية للزوايا ضمن الدورة الواحدة
82	الدرس 3 تمثيل الاقترانات المثلثية
88	الدرس 4 حل المعادلات المثلثية
96	اختبار نهاية الوحدة
98	الوحدة 4 تطبيقات المثلثات
99	مشروع الوحدة: صنع كلينومتر واستعماله
100	الدرس 1 الاتجاه من الشمال
106	الدرس 2 قانون الجيوب
113	الدرس 3 قانون جيب التمام
119	الدرس 4 استعمال جيب الزاوية لإيجاد مساحة المثلث
124	الدرس 5 حل مسائل ثلاثية الأبعاد
130	اختبار نهاية الوحدة

ما أهمية هذه
الوحدة؟

تُستخدم أنظمة المعادلات في كثير من مجالات الحياة. فخبراء الأرصاد الجوية -مثلاً- يُعبرون عن العلاقة بين درجة الحرارة، وسرعة الرياح، والضغط الجوي، ومعدل الهطل، باستخدام نظام معادلات غير خطي؛ ذلك أن أي تغيير في أحد هذه العوامل يؤدي إلى تغيير في العوامل الأخرى.

سأتعلم في هذه الوحدة:

- ◀ حلّ معادلات خاصة أس المتغير فيها عدد صحيح موجب أكبر من 2
- ◀ حلّ نظام مكون من معادلة خطية، وأخرى تربيعية.
- ◀ حلّ نظام مكون من معادلتين تربيعيتين.

تعلمت سابقاً:

- ✓ حلّ معادلات تربيعية باستعمال التحليل.
- ✓ حلّ معادلات تربيعية باستعمال القانون العام.
- ✓ حلّ أنظمة معادلات تتضمن معادلتين خطيتين بمتغيرين.

البحث عن أنظمة معادلات في نماذج حياتية.

فكرة المشروع




شبكة الإنترنت، برمجية جيو جبرا.

المواد والأدوات




خطوات تنفيذ المشروع:

- 1 أبحث مع أفراد مجموعتي في شبكة الإنترنت عن صور لنماذج حياتية تظهر فيها منحنيات ومستقيمات متقاطعة (مثل: الجسور، ونوافير المياه، وخرائط الطرق)، أو ألتقط صوراً لذلك، ثم أحفظها في ملف على جهاز الحاسوب.
- 2 أستخدم برمجية جيو جبرا لإيجاد معادلة كل من المنحنيات المتقاطعة التي تظهر في الصور باتباع الخطوات الآتية:


• انقر على أيقونة **Image**  من شريط الأدوات، ثم أختار الصورة التي حفظتها.

• أعدّل موقع الصورة، وأختار مقاساً مناسباً لها بتحريك النقطتين A و B اللتين تظهران عليها.

• أجد معادلة أحد المنحنيات التي تظهر في الصورة، وذلك

بتحديد بعض النقاط عليه باستعمال أيقونة **A**  من شريط الأدوات.

• أكتب الصيغة $\text{FitPoly}(\{C, D, E, F, G, H, I, J, K, L\}, n)$

في شريط الإدخال، ثم أنقر  ليظهر منحنى فوق الصورة، ومعادلة في شريط الإدخال.

• أستعمل المؤشر فوق المعادلة لضبط المنحنى الظاهر،

بحيث ينطبق تماماً على المنحنى الذي في الصورة.

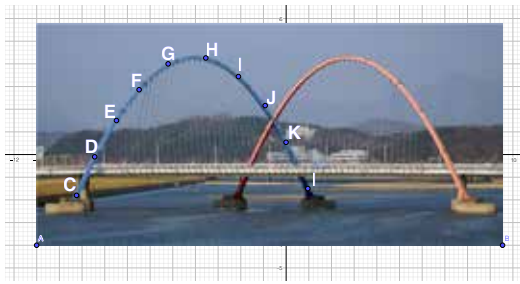
• أكرّر الخطوات السابقة لتحديد معادلات المنحنيات الأخرى التي تظهر في الصورة.

- 3 أكتب مع أفراد مجموعتي نظام معادلات يمثل منحنيين متقاطعين في كل صورة، ثم نختار إحدى هذه الأنظمة لنحلّها جبرياً، ثم نتحقق من صحّة الحلّ بإظهار نقاط تقاطع المنحنيين في برمجية جيو جبرا.

عرض النتائج:

أعدّد مع أفراد مجموعتي عرضاً تقديمياً نبيّن فيه ما يأتي:

- خطوات تنفيذ المشروع موضحّة بالصور (نستعمل خاصية طباعة الشاشة).
- بعض الصعوبات التي واجهناها في أثناء العمل بالمشروع، ومعلومة جديدة تعرّفناها في أثناء العمل بالمشروع.



حلُّ مُعادلاتٍ خاصَّةٍ Solving Special Equations

حلُّ مُعادلاتٍ خاصَّةٍ أُسِّ المُتغيِّر فيها عددٌ صحيحٌ موجبٌ أكبرٌ من 2
الصورة التربيعية.

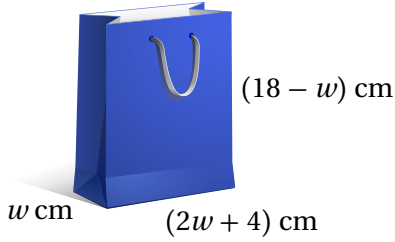
فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



كيسٌ للهدايا على شكلٍ مُتوازي مستطيلاتٍ، حجمُه 1152 cm^3 ، وأبعادهُ بدلالةِ المُتغيِّر w موضَّحةٌ في الشكلِ المُجاور. أجدُ أبعادهُ.

تعلَّمتُ سابقاً حلَّ المُعادلاتِ التربيعيةِ بطرائقٍ مُتنوِّعةٍ، وسأتعلَّمُ في هذا الدرسِ حلَّ مُعادلاتٍ أُسِّ المُتغيِّر فيها عددٌ صحيحٌ موجبٌ أكبرٌ من 2 باستعمالِ التحليلِ والتجميعِ وخاصيةِ الضربِ الصِّفريِّ.

حلُّ المُعادلاتِ بإخراجِ العاملِ المُشتركِ الأكبرِ

تعلَّمتُ سابقاً أنَّ تحليلَ المقدارِ الجبريِّ بإخراجِ العاملِ المُشتركِ الأكبرِ لحدوده هو عمليةٌ عكسيةٌ لعمليةِ التوزيعِ، ويمكنُ الإفادةُ من إخراجِ العاملِ المُشتركِ الأكبرِ في تبسيطِ وحلِّ مُعادلاتٍ أُسِّ المُتغيِّر فيها عددٌ صحيحٌ أكبرٌ من 2.

أتعلَّمُ

أحتاجُ في بعضِ المُعادلاتِ إلى استعمالِ طرائقِ حلِّ المُعادلاتِ التربيعيةِ التي تعلَّمتُها سابقاً، بعدَ إخراجِ العاملِ المُشتركِ الأكبرِ.

مثال 1

أحلُّ كلاً من المُعادلاتِ الآتية:

$$1 \quad x^3 + 4x^2 = 5x$$

$$x^3 + 4x^2 = 5x$$

$$x^3 + 4x^2 - 5x = 0$$

$$x(x^2 + 4x - 5) = 0$$

$$x(x + 5)(x - 1) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{or} \quad x + 5 = 0 \quad \text{or} \quad x - 1 = 0$$

$$x = -5 \quad x = 1$$

المعادلة المُعطاة

ب طرح $5x$ من طرفي المُعادلة

بالتحليلِ بإخراجِ العاملِ المُشتركِ الأكبرِ

بالتحليلِ إلى العواملِ

خاصيةِ الضربِ الصِّفريِّ

بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ

إذن، جذورُ المُعادلةِ $-5, 0, 1$

أتعلَّمُ

أكتبُ جميعَ حدودِ المُعادلةِ في الطرفِ الأيسرِ من المُعادلةِ قبلَ إخراجِ العاملِ المُشتركِ الأكبرِ.

2 $2x^3 = 18x$

$2x^3 = 18x$ المعادلة المُعطاة

$2x^3 - 18x = 0$ بطرح $18x$ من طرفي المعادلة

$2x(x^2 - 9) = 0$ بالتحليل بإخراج العامل المشترك الأكبر

$2x(x - 3)(x + 3) = 0$ بتحليل الفرق بين مربعين

$2x = 0$ or $x - 3 = 0$ or $x + 3 = 0$ خاصية الضرب الصفري

$x = 0$ $x = 3$ $x = -3$ بحل كل معادلة

إذن، جذور المعادلة $3, 0, -3$

أحل كلاً من المعادلات الآتية:  **أتتحق من فهمي**

a) $x^3 + 12x = 7x^2$

b) $x^3 = 25x$

حل المعادلات بالتجميع

يمكن حل المعادلات التي تحتوي على أربعة حدود جبرية أو أكثر باستعمال طريقة التجميع، وذلك بتجميع الحدود التي تحتوي على عوامل مشتركة بينها، ثم استعمال خاصية الضرب الصفري لحل المعادلة.

مثال 2

أحل كلاً من المعادلات الآتية:

1 $x^3 - 2x^2 + 9x - 18 = 0$

$x^3 - 2x^2 + 9x - 18 = 0$ المعادلة المُعطاة

$(x^3 - 2x^2) + (9x - 18) = 0$ بتجميع الحدود ذات العوامل المشتركة

$x^2(x - 2) + 9(x - 2) = 0$ بتحليل كل تجميع بإخراج العامل المشترك الأكبر

$(x - 2)(x^2 + 9) = 0$ بإخراج $(x - 2)$ عاملاً مشتركاً

$x - 2 = 0$ or $x^2 + 9 = 0$ خاصية الضرب الصفري

$x = 2$ بحل المعادلة

بما أنه لا يوجد حل حقيقي للمعادلة $x^2 + 9 = 0$ لأن مميزها سالب، فإن للمعادلة الأصلية جذراً وحيداً هو 2

أتذكر

للتحقق من صحة الحل، أعوض قيم x في المعادلة الأصلية.

أتذكر

يمكن تحليل المقدار الجبري بالتجميع إذا تحققت الشروط الآتية جميعها:

- إذا احتوى على أربعة حدود أو أكثر.
- إذا احتوى على عوامل مشتركة بين الحدود يمكن تجميعها معاً.
- إذا احتوى على عاملين مشتركين متساويين أو كان أحدهما نظيراً جمعياً للآخر.

أفكر

لماذا $x^2 + 9 \neq 0$ ؟ أبرر إجابتي.

2 $4x^3 + 8x^2 - 5x - 10 = 0$

$$4x^3 + 8x^2 - 5x - 10 = 0$$

$$(4x^3 + 8x^2) + (-5x - 10) = 0$$

$$4x^2(x + 2) - 5(x + 2) = 0$$

$$(x + 2)(4x^2 - 5) = 0$$

$$x + 2 = 0 \quad \text{or} \quad 4x^2 - 5 = 0$$

$$x = -2 \quad x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

المعادلة المُعطاة

بتجميع الحدود ذات العوامل المُشتركة

بتحليل كل تجميع بإخراج العامل المُشترك الأكبر

بإخراج $(x+2)$ عاملاً مُشترَكًا

خاصية الضرب الصفري

بحل كل المعادلة

إذن، جذور المعادلة $-2, -\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}$

أتحقق من فهمي 

أحلُّ كلاً من المعادلات الآتية:

a) $9x^3 + 18x^2 + 2x + 4 = 0$

b) $2x^3 + x^2 - 14x - 7 = 0$

أَتَذَكَّرُ

تُستعملُ الجذورُ التربيعيةُ
لحلِّ المعادلاتِ على
الصورةِ $x^2 = c$ ، حيثُ
 $c \geq 0$

تحليلُ مجموعِ مُكعَّبينِ أو تحليلُ الفرقِ بينهما، وحلُّ معادلتيهما

تعلمتُ سابقاً حالةً خاصَّةً من تحليل المقادير الجبرية، هي تحليل الفرق بين مربعين، وتوجد أيضاً حالةً خاصَّةً أخرى من تحليل المقادير الجبرية، هي تحليل مجموع مكعَّبين أو تحليل الفرق بينهما.

تحليلُ مجموعِ مُكعَّبينِ أو تحليلُ الفرقِ بينهما

مفهومٌ أساسيٌّ

• تحليلُ مجموعِ مُكعَّبينِ

بالرموز	مثال
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$	$x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

• تحليلُ الفرقِ بينِ مُكعَّبينِ

بالرموز	مثال
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	$x^3 - 64 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16)$

يمكن حلُّ مُعادلاتٍ تحتوي على مجموع مكعَّبين أو على الفرق بينهما باستعمال طرائق التحليل الخاصَّة بكلِّ منهما وخاصيَّة الضرب الصِّفريِّ.

مثال 3

أحلُّ كُلَّ مِنَ المُعادلاتِ الآتية:

1 $8x^3 + 1 = 0$

$$8x^3 + 1 = 0$$

المُعادلةُ المُعطاةُ

$$(2x)^3 + 1^3 = 0$$

بالكتابة على صورة مجموع مُكعَّبين

$$(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) = 0$$

بتحليل مجموع مُكعَّبين

$$2x + 1 = 0 \quad \text{or} \quad 4x^2 - 2x + 1 = 0$$

خاصيَّة الضرب الصِّفريِّ

$$x = -\frac{1}{2}$$

بحلُّ المُعادلة

بما أنَّه لا يوجد حلٌّ حقيقيٌّ للمُعادلة $4x^2 - 2x + 1 = 0$ لأنَّ ممیزها سالبٌ، فإنَّ للمُعادلة الأصلية جذرًا وحيدًا هو $-\frac{1}{2}$

طريقة بديلة

يمكن حلُّ المُعادلة $8x^3 + 1 = 0$ بطريقةٍ أخرى كالآتي:

$$8x^3 + 1 = 0$$

المُعادلةُ المُعطاةُ

$$8x^3 = -1$$

ب طرح 1 من طرفي المُعادلة

$$x^3 = \frac{-1}{8}$$

بقسمة طرفي المُعادلة على 8

$$x = -\frac{1}{2}$$

بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

2 $x^3 - 125 = 0$

$$x^3 - 125 = 0$$

المُعادلةُ المُعطاةُ

$$x^3 - 5^3 = 0$$

بالكتابة على صورة الفرق بين مكعَّبين

$$(x - 5)(x^2 + 5x + 25) = 0$$

بتحليل الفرق بين مكعَّبين

$$x - 5 = 0 \quad \text{or} \quad x^2 + 5x + 25 = 0$$

خاصيَّة الضرب الصِّفريِّ

$$x = 5$$

بحلُّ المُعادلة

بما أنَّه لا يوجد حلٌّ حقيقيٌّ للمُعادلة $x^2 + 5x + 25 = 0$ لأنَّ ممیزها سالبٌ، فإنَّ للمُعادلة الأصلية جذرًا وحيدًا هو $x = 5$

أفكر

أحل المعادلة في الفرع 2 بطريقة أخرى.

3 $128x^5 - 54x^2 = 0$

$$128x^5 - 54x^2 = 0$$

المعادلة المُعطاة

$$2x^2 (64x^3 - 27) = 0$$

بالتحليل بإخراج العامل المشترك

$$2x^2 ((4x)^3 - 3^3) = 0$$

بالكتابة على صورة الفرق بين مكعبين

$$2x^2 (4x-3)(16x^2 + 12x + 9) = 0$$

بتحليل الفرق بين مكعبين

$$2x^2 = 0 \text{ or } 4x-3=0 \text{ or } 16x^2+12x+9=0$$

خاصية الضرب الصفري

$$x = 0 \quad x = \frac{3}{4}$$

بحل كل معادلة

بما أنه لا يوجد حل حقيقي للمعادلة $16x^2 + 12x + 9 = 0$ لأن مميزها سالب، فإن للمعادلة الأصلية جذرين هما: $0, \frac{3}{4}$

أتحقق من فهمي 

أحلُّ كلاً من المعادلات الآتية:

a) $27x^3 - 1 = 0$

b) $x^3 + 1000 = 0$

c) $16x^4 - 250x = 0$

حلُّ معادلاتٍ على الصورة التربيعية

يُسمى المقدار الجبري المكتوب على الصورة $au^2 + bu + c$ ؛ حيث u مقدار جبري، مقداراً على الصورة التربيعية (quadratic form)، ويمكن استعمال طرائق التحليل التي تعلمتها سابقاً في حلِّ معادلاتٍ تحوي مقادير على الصورة التربيعية.

مثال 4

أحلُّ المعادلة: $x^6 - 3x^3 - 40 = 0$

الطريقة 1: التحليل

$$x^6 - 3x^3 - 40 = 0$$

المعادلة المُعطاة

$$(x^3)^2 - 3x^3 - 40 = 0$$

بكتابة المعادلة على الصورة التربيعية

$$(x^3 - 8)(x^3 + 5) = 0$$

بالتحليل إلى العوامل

$$x^3 - 8 = 0 \text{ or } x^3 + 5 = 0$$

خاصية الضرب الصفري

$$x = 2 \quad x = \sqrt[3]{-5}$$

بحل كل المعادلة

إذن، جذرا المعادلة $2, \sqrt[3]{-5}$

أتذكر

أحلُّ أولاً بإخراج العامل المشترك لتسهيل حلِّ المعادلة.

أفكر

هل يمكن حلُّ المعادلة $x^3 + 5 = 0$ بطريقة أخرى؟ أبرر إجابتي.

الطريقة 2: التعويض

أفترض أن $x^3 = u$

$x^6 - 3x^3 - 40 = 0$

المعادلة المعطاة

$(x^3)^2 - 3x^3 - 40 = 0$

بكتابة المعادلة على الصورة التربيعية

$u^2 - 3u - 40 = 0$

بتعويض $x^3 = u$

$(u - 8)(u + 5) = 0$

بتحليل العبارة التربيعية

$u - 8 = 0$ or $u + 5 = 0$

خاصية الضرب الصفري

$u = 8$

$u = -5$

بحل كل المعادلة

$x^3 = 8$

$x^3 = -5$

بتعويض $u = x^3$

$x = 2$

$x = \sqrt[3]{-5}$

بأخذ الجذر التكعيبي لطرفي كل معادلة

إذن، جذرا المعادلة $\sqrt[3]{-5}$ ، 2،

أتحقق من فهمي 

أحلُّ كلاً من المعادلات الآتية:

a) $x^4 - 625 = 0$

b) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

خطأ شائع

يُخطئ بعض الطلبة بالتوقف عند إيجاد u ، والصحيح إكمال الحل وإيجاد قيمة x التي تحل المعادلة.

لحل المعادلات التي أس المتغير فيها عدد صحيح أكبر من 2 كثير من التطبيقات الحياتية.

مثال 5: من الحياة 



صناعة: تصنع شركة صناديق لحفظ البضائع على شكل متوازي مستطيلات، طول كل صندوق يقل 30 cm عن ارتفاعه، وعرضه يقل 90 cm عن ارتفاعه. إذا كان حجم الصندوق 324000 cm^3 ، فأجد أبعاده.

أفترض أن طول الصندوق l ، وعرضه w ، وارتفاعه h ، وحجمه V .

طول الصندوق: $l = h - 30$

عرض الصندوق: $w = h - 90$

$$V = l \times w \times h$$

$$324000 = (h - 30)(h - 90)h$$

$$324000 = h^3 - 120h^2 + 2700h$$

$$h^3 - 120h^2 + 2700h - 324000 = 0$$

$$(h^3 - 120h^2) + (2700h - 324000) = 0$$

$$h^2(h - 120) + 2700(h - 120) = 0$$

$$(h - 120)(h^2 + 2700) = 0$$

$$h - 120 = 0 \quad \text{or} \quad h^2 + 2700 = 0$$

$$h = 120$$

حجم مُتوازي المستطيلات

بتعويض, $V = 324000$,

$$l = h - 30, w = h - 90$$

باستعمال خاصية التوزيع

ب طرح 324000 من طرفي المعادلة

بتجميع الحدود ذات العوامل المشتركة

بتحليل كل تجميع بإخراج العامل المشترك الأكبر

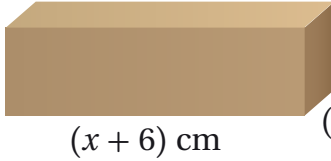
إخراج $(h - 120)$ عاملاً مشتركاً

خاصية الضرب الصفري

بحل المعادلة

بما أنه لا يوجد حل حقيقي للمعادلة $h^2 + 2700 = 0$ لأن مميزها سالب، فإن ارتفاع الصندوق 120 cm، ومنه فإن طوله 90 cm، وعرضه 30 cm

أتحقق من فهمي 



صناعة: تصنع شركة صنابير لجهاز إلكتروني على شكل مُتوازي مستطيلات، أبعادها كما هو مبين في الشكل المُجاور. إذا كان حجم الصندوق 60 cm^3 ، فأجد أبعاده.

أدرب وأحل المسائل 

أحل كلاً من المعادلات الآتية:

1 $3x^4 - 12x^3 = 0$

2 $35x^3 - 28x^2 - 7x = 0$

3 $6x^6 - 3x^4 - 9x^2 = 0$

4 $2x^3 + 4x^2 + 2x = 0$

5 $3x^3 = 12x$

6 $x^3 + 4x^2 + 4x = 0$

7 $2x^3 - 3x^2 - 4x + 6 = 0$

8 $10x^3 - 15x^2 + 2x - 3 = 0$

9 $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$

10 $125x^3 - 1 = 0$

11 $3x^3 + 3000 = 0$

12 $x^4 + x^3 - 12x - 12 = 0$

13 $5x^3 - 320 = 0$

14 $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

15 $2x^4 - 9x^2 + 4 = 0$

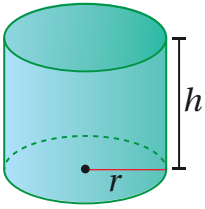
16 $4x^4 + 20x^2 = -25$

17 $16x^4 - 81 = 0$

18 $5w^6 - 25w^3 + 30 = 0$



19 مشاريع صغيرة: يمثل الاقتران $R(t) = t^3 - 8t^2 + t + 15$ الإيراد السنوي (بالألف دينار) لمشروع غيداء الصغير بعد t عامًا من إنشائه. بعد كم سنة يصل إيراد غيداء إلى 23 ألف دينار؟



20 هندسة: يبين الشكل المجاور أسطوانة حجمها $25\pi h \text{ cm}^3$. إذا كان طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة يقل عن ارتفاعها بمقدار 3 cm، فأجد أبعادها.

21 أ حل المسألة الواردة في بداية الدرس.

مهارات التفكير العليا



22 أكتشف الخطأ: حلت نداء المعادلة $2x^4 - 18x^2 = 0$ ، كما هو مبين أدناه. أكتشف الخطأ في حلها وأصححها.

$$\begin{aligned} 2x^4 - 18x^2 &= 0 \\ 2x^2(x^2 - 9) &= 0 \\ x^2 - 9 &= 0 \\ (x + 3)(x - 3) &= 0 \\ x = -3 \text{ or } x = 3 \end{aligned}$$

تحد: أ حل المعادلتين الآتيتين، وأبرر إجابتني:

23 $x^6 + 4x^3 = 2$

24 $(x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1) = 3$

25 تبرير: أجد قيمة العدد w التي تجعل للمعادلة $5x^3 + wx^2 + 80x = 0$ حلين حقيقيين فقط، وأبرر إجابتني.

حل أنظمة المعادلات بيانياً Solving Systems of Equations Graphically

يُمكنني استعمال برمجية جيوجبرا (GeoGebra) لتمثيل أنظمة المعادلات، وحلها بيانياً. أستعمل الرابط www.geogebra.org/download لتثبيت نسخة 6 GeoGebra Classic من هذه البرمجية على جهاز الحاسوب. يُمكنني أيضاً استعمال النسخة المتوافرة في شبكة الإنترنت من دون حاجة إلى تثبيتها في جهاز الحاسوب عن طريق الرابط الإلكتروني: www.geogebra.org/classic

نشاط

أحل نظام المعادلات التربيعية الآتي بيانياً باستعمال برمجية جيوجبرا.

$$x^2 + y^2 = 13$$

$$x^2 - y = 7$$

الخطوة 1: أمثل بيانياً المعادلة التربيعية: $x^2 + y^2 = 13$.

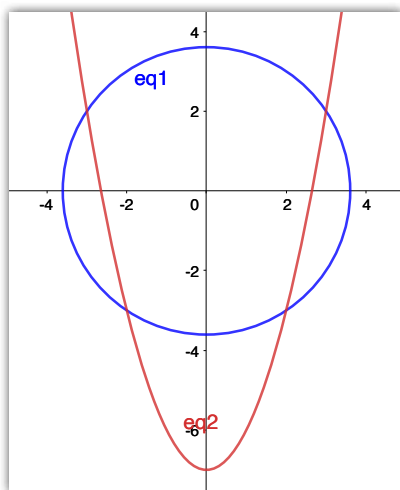
أدخل المعادلة في حاسبة جيوجبرا، بالنقر على المفاتيح الآتية:

x x^2 + y x^2 = 1 3 ←


الخطوة 2: أمثل بيانياً المعادلة التربيعية: $x^2 - y = 7$.

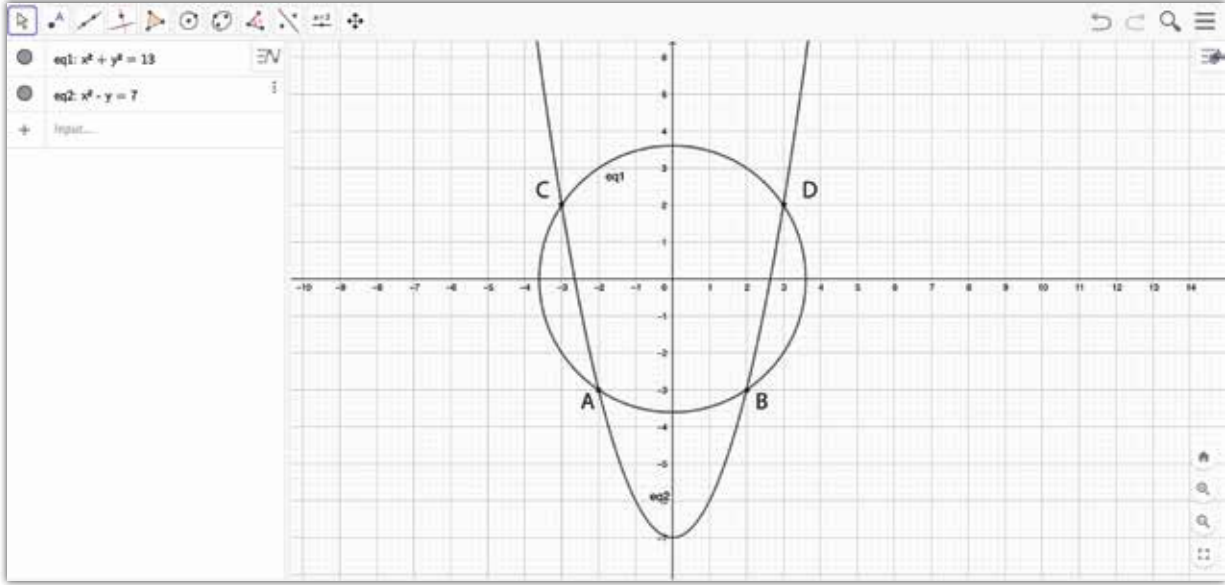
أدخل المعادلة في حاسبة جيوجبرا، بالنقر على المفاتيح الآتية:

x x^2 - y = 7 ←



الأحظ أن منحنَيي المعادلتين يتقاطعان في أربع نقاط؛ ما يعني وجود أربعة حلول لنظام المعادلات.

الخطوة 3: أحدد إحداثيات نقاط التقاطع بين منحنَي المعادلتين. أختار  من شريط الأدوات، ثم أنقرُ على منحنَي المعادلتين، فتظهر إحداثيات نقاط التقاطع.



إحداثيات نقاط التقاطع هي: $(-3, 2)$, $(3, 2)$, $(2, -3)$, $(-2, -3)$ ؛ ما يعني أن حلول نظام المعادلات هي:

الحل الأول:	$x = -3, y = 2$	الحل الثاني:	$x = 3, y = 2$
الحل الثالث:	$x = 2, y = -3$	الحل الرابع:	$x = -2, y = -3$

أدرب 

أحل كل نظام معادلات مما يأتي بياناً باستعمال برمجة جيو جبراً:

1 $y = x - 4$
 $2x^2 + 3y^2 = 12$

2 $y = x^2$
 $x^2 + 2y^2 = 34$

3 $x + y = 16$
 $x^2 - y^2 = 20$

4 $3x + 4y = 1$
 $y = x^2 + 5$

5 $y = 6x$
 $x^2 + y^2 = 9$

6 $x = 7 + y$
 $y = 3x^2 - 2$

الدرس 2

حلّ نظامٍ مُكوّنٍ من معادلةٍ خطيّةٍ ومعادلةٍ تربيعيّةٍ Solving a System of Linear and Quadratic Equations



حلّ نظامٍ مُكوّنٍ من معادلةٍ خطيّةٍ ومعادلةٍ تربيعيّةٍ.

تُمثّل المعادلة $y = x - 3$ طريقًا مستقيمًا داخل إحدى المدن،
في حين تُمثّل المعادلة $y = x^2 - 3x - 10$ طريقًا آخرًا منحنياً
داخل المدينة نفسها. هل يتقاطع هذان الطريقان أم لا؟

فكرة الدرس



مسألة اليوم



يُمكنني حلّ نظامٍ مُكوّنٍ من معادلةٍ خطيّةٍ وأخرى تربيعيّةٍ باستعمالِ طريقةٍ التعويضِ، وذلك
بكتابة أحد المتغيّرين في المعادلة الخطيّة بدلالة الآخر، ثمّ تعويضه في المعادلة التربيعيّة وحلّها.

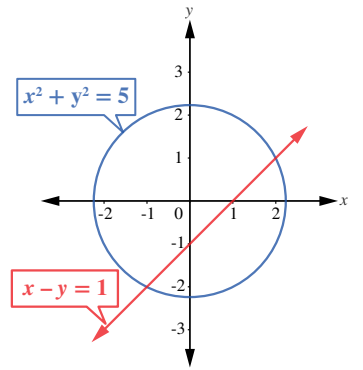
مثال 1

أحلّ نظام المعادلات الآتي، ثمّ أتحقّق من صحّة الحلّ:

$$x - y = 1$$

$$x^2 + y^2 = 5$$

يُمكنني استعمالُ برمجية جيو جبرا (GeoGebra)، أو حاسبة بيانية، لتمثيل المعادلتين بيانيًا
على المستوى الإحداثي نفسه كما في التمثيل البيانيّ المجاور. ألاحظُ أنّ منحنَيي المعادلتين
يتقاطعان في نقطتين؛ ما يعني أنّ للنظام حلّين مختلفين. أتحقّق من ذلك جبريًا باستعمالِ
طريقة التعويض:



الخطوة 1 أكتب المعادلة الخطيّة بالصورة القياسية.

$$x - y = 1$$

$$y = x - 1$$

المعادلة الخطيّة

بكتابة y بدلالة x

الخطوة 2 أعوّض قيمة y من المعادلة الخطيّة في المعادلة التربيعيّة:

$$x^2 + (x - 1)^2 = 5$$

$$x^2 + x^2 - 2x + 1 = 5$$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

بتعويض قيمة y في المعادلة التربيعيّة

بفك القوسين

بالتبسيط

بالقسمة على 2

الخطوة 3 أحل المعادلة الناتجة باستعمال التحليل:

$$(x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x + 1 = 0 \quad \text{or} \quad x - 2 = 0$$

$$x = -1 \quad \text{or} \quad x = 2$$

بالتحليل

خاصية الضرب الصفري

بحل المعادلتين

أتذكر

توجد طرائق عدة لحل معادلة تربيعية، منها: التحليل إلى العوامل، والقانون العام.

الخطوة 4 أعوّض قيمة x لإيجاد قيمة y :

الحالة الأولى: عندما $x = -1$:

$$y = x - 1$$

$$y = -1 - 1 = -2$$

بتعويض $x = -1$ في المعادلة الخطية

الحل الأول: $(x, y) = (-1, -2)$.

للتحقق من صحة الحل الأول، أعوّض الزوج المرتب $(-1, -2)$ في كل من المعادلة الخطية والتربيعية:

$$x - y = -1 - (-2) = 1 \quad \checkmark$$

بالتعويض في المعادلة الخطية

$$x^2 + y^2 = (-1)^2 + (-2)^2 = 1 + 4 = 5 \quad \checkmark$$

بالتعويض في المعادلة التربيعية

الحالة الثانية: عندما $x = 2$:

$$y = 2 - 1 = 1$$

بتعويض $x = 2$ في المعادلة الخطية

الحل الثاني: $(x, y) = (2, 1)$.

للتحقق من صحة الحل الثاني، أعوّض الزوج المرتب $(2, 1)$ في كل من المعادلة الخطية والتربيعية:

$$x - y = 2 - 1 = 1 \quad \checkmark$$

بالتعويض في المعادلة الخطية

$$x^2 + y^2 = (2)^2 + (1)^2 = 4 + 1 = 5 \quad \checkmark$$

بالتعويض في المعادلة التربيعية

أتحقق من فهمي

أحل نظام المعادلات الآتي، ثم أتحقق من صحة الحل:

$$2x + y = 12$$

$$y = x^2 + 5x - 6$$

يوجد حلان لنظام المعادلات في المثال السابق. ولكن، هل يوجد نظام معادلات له حل واحد؟ لمعرفة الإجابة، أدرس المثال الآتي.

إرشاد

يجب تعويض الحل في كلتا معادلتَي النظام؛ لكيلا يكون الحل غير صحيح، بحيث يُحقّق إحدى المعادلتين من دون الأخرى.

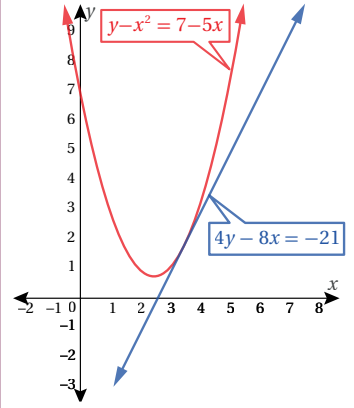
مثال 2

أحلّ نظام المعادلات الآتي:

$$y - x^2 = 7 - 5x$$

$$4y - 8x = -21$$

عند تمثيل معادلتَي النظام في المستوى الإحداثي نفسه، يُلاحظ وجود نقطة تقاطع واحدة كما في التمثيل البياني المجاور؛ ما يعني أن للنظام حلًا واحدًا فقط. أتحرّق من ذلك جبريًا باستعمال طريقة التعويض:



الخطوة 1 أكتب المعادلة الخطية بالصورة القياسية (بالنسبة إلى y).

$$4y - 8x = -21$$

$$4y = 8x - 21$$

$$y = 2x - 5.25$$

المعادلة الخطية

بجمع $8x$ للطرفين

بقسمة الطرفين على 4

الخطوة 2 أعرّض قيمة y من المعادلة الخطية في المعادلة التربيعية:

$$y - x^2 = 7 - 5x$$

$$(2x - 5.25) - x^2 = 7 - 5x$$

$$x^2 - 7x + 12.25 = 0$$

المعادلة التربيعية

بتعويض قيمة y من المعادلة الخطية

بالتبسيط

الخطوة 3 أحلّ المعادلة الناتجة:

لحلّ المعادلة باستعمال القانون العام، أهدّد قيم المعاملات: $a = 1$, $b = -7$, $c = 12.25$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(12.25)}}{2(1)}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 49}}{2} = 3.5$$

القانون العام

بالتعويض

بالتبسيط

الخطوة 4 أعرّض قيمة x لإيجاد قيمة y :

$$y = 2x - 5.25$$

$$= 2(3.5) - 5.25$$

$$= 1.75$$

المعادلة الخطية

بتعويض $x = 3.5$

بالتبسيط

إذن، حلّ النظام هو الزوج المرتب $(3.5, 1.75)$

أتذكّر

أستعمل القانون العام لحلّ المعادلات التي يصعب تحليلها.

أتحقق من فهمي

$$y = 3x + 10$$

$$x^2 + y^2 = 10$$

أحلُّ نظامَ المعادلاتِ المجاور، ثمَّ أتحقِّقُ من صِحِّهِ الحَلِّ:

لاحظتُ في المثالين السابقين وجودَ حَلٍّ أو حلَّينِ لنظامِ المعادلاتِ. ولكن، هل توجدُ أنظمةٌ معادلاتٍ ليس لها حلٌّ؟ لمعرفة الإجابة، أدرسُ المثالَ الآتي.

مثال 3

أحلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتي:

$$y + x = 5$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

يتبيَّنُ من التمثيلِ البيانيِّ المجاور أنَّ منحنَيي المعادلتين لا يتقاطعان في أيِّ نقطة؛ ما يعني عدمَ وجودِ حَلٍّ لنظامِ المعادلاتِ. أتحقِّقُ من ذلك جبريًّا باستعمالِ طريقةِ التعويضِ:

$$y + x = 5$$

المعادلة الخطية

$$x = 5 - y$$

بكتابة x بدلالة y

$$(5 - y)^2 + y^2 = 9$$

بتعويض قيمة x في المعادلة التربيعية

$$25 - 10y + y^2 + y^2 = 9$$

بإيجاد المفكوك

$$2y^2 - 10y + 16 = 0$$

بالتبسيط

بعد ذلك أجدُ قيمة المُمَيِّزِ $\Delta = b^2 - 4ac$ لتحديد إذا كان للمعادلة التربيعية الناتجة حلٌّ أم لا، أجدُّ قيمَ المعاملات: $a = 2, b = -10, c = 16$ ، وبالتعويض في صيغة المُمَيِّزِ ينتجُ:

$$\Delta = (-10)^2 - 4(2)(16) = -28$$

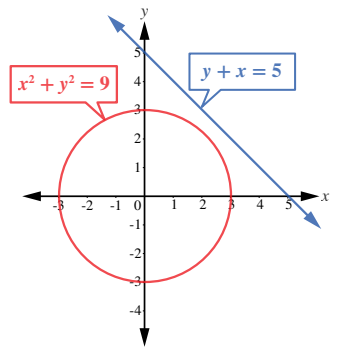
قيمة المُمَيِّزِ سالبة. إذن، لا يوجد حَلٌّ للمعادلة. ومنه لا يوجد حَلٌّ لهذا النظام.

أتحقق من فهمي

$$x - y = 0$$

$$y = x^2 + 3x + 2$$

أحلُّ نظامَ المعادلاتِ المجاور:



أتذكر

يعتمد عددُ جذورِ المعادلة وأنواعها على قيمة المُمَيِّزِ الذي يُرمزُ إليه بالرمز (Δ)، حيثُ:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

أتذكر

لا يوجد عددٌ حقيقيٌّ مربعه عددٌ سالبٌ.

عدّد حلولِ نظامٍ مُكوّنٍ من معادلتين خطّيتين وأخرى تربيعية

نتيجة

لأيّ نظامٍ يتكوّن من معادلتين خطّيتين وأخرى تربيعية، تكون واحدة من العبارات الآتية صحيحة:

- 1 وجود حلّين مختلفين.
- 2 وجود حلٍّ واحدٍ فقط.
- 3 عدم وجود حلٍّ.

توجد تطبيقات حياتية كثيرة لحلّ الأنظمة التي تتكوّن من معادلتين خطّيتين وأخرى تربيعية.

مثال 4: من الحياة

سجادةٌ مستطيلة الشكل مصنوعة يدويًا، مجموع بُعديها 7 m، وطول قُطرها 5 m. أجد كلاً من طولها، وعرضها.

لايجاد بُعدي السجادة، أكتب نظام معادلاتٍ يُمثّل المسألة، ثمّ أحلّه.

أفترض أنّ طول السجادة هو x ، وأنّ عرضها هو y ، وبما أنّ مجموع بُعدي السجادة هو 7 m، فإنّ $x + y = 7$ ، وبما أنّ قُطر السجادة هو 5 m، فإنّ (باستعمال نظرية فيثاغورس): $x^2 + y^2 = 25$ ، إذن، أصبح لدينا نظام يتكوّن من معادلتين خطّيتين وأخرى تربيعية.

$$y + x = 7$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

والآن، سأحلّ النظام باستخدام طريقة التعويض:

$$x + y = 7$$

$$y = 7 - x$$

$$x^2 + (7 - x)^2 = 25$$

$$2x^2 - 14x + 24 = 0$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$(x - 4)(x - 3) = 0$$

$$x - 4 = 0 \text{ or } x - 3 = 0$$

$$x = 4 \text{ or } x = 3$$

المعادلة الخطّية

بكتابة y بدلالة x

بتعويض قيمة y في المعادلة التربيعية

بالتبسيط

بالقسمة على 2

أحلّ المعادلة التربيعية بالتحليل إلى العوامل:

بالتحليل

خاصية الضرب الصفريّ

بحلّ كل معادلة

معلومة



قد تستغرق صناعة السجادة اليدوية الصغيرة 4 أشهر من العمل المتواصل.

أتذكّر

أتحقّق من صحّة التحليل باستخدام خاصية التوزيع.

أعوّض قيم x في المعادلة الخطية لإيجاد قيم y :

$$y = 7 - 3$$

بتعويض قيمة $x = 3$ في المعادلة الخطية

$$y = 4$$

قيمة y الأولى

$$y = 7 - 4$$

بتعويض قيمة $x = 4$ في المعادلة الخطية

$$y = 3$$

قيمة y الثانية

إذن، حل النظام هو: $(4, 3)$ و $(3, 4)$.

بما أن طول السجادة أكبر من عرضها، فإن الطول هو 4 m ، والعرض هو 3 m

أتحقق من فهمي

مزرعة مستطيلة الشكل، طول قطرها 50 m ، ومحيطها 140 m . أجد بُعدي المزرعة.

أتدرب وأحل المسائل

أحلُّ كلاً من أنظمة المعادلات الآتية، ثم أتحقق من صحّة الحلّ:

1 $y = x^2 + 4x - 2$
 $y + 6 = 0$

2 $y = x^2 + 6x - 3$
 $y = 2x - 3$

3 $y = x^2 + 4$
 $x - y = -1$

4 $y = x^2 + 4x - 1$
 $7x + 2y = 6$

5 $y = x^2 + 4x + 7$
 $y - 3 = 0$

6 $y = x^2 - 2x + 4$
 $y = x$

7 $x^2 + y^2 = 34$
 $2x - y = 1$

8 $y = x^2 + 2x + 1$
 $y = 0$

9 $x^2 + y^2 = 4$
 $x + y = 5$

10 $x^2 + y^2 = 10$
 $x - y = 2$

11 $x^2 + (y - 1)^2 = 17$
 $x = 1$

12 $2x + 3y = 5$
 $2y^2 + xy = 12$

13 **بركة:** بركة ماء قاعدتها مستطيلة الشكل، ومحيطها 16 m ، والفرق بين مربّعي بُعديها 16 m^2 . أجد بُعديها.

14 **أعداد:** أجد العددين الموجبين اللذين مجموعهما 12 ، والفرق بين مربّعيهما 24

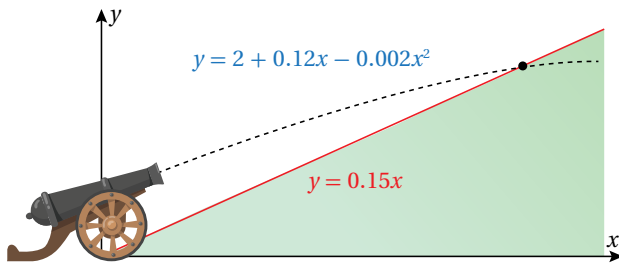
15 **هندسة:** دائرتان مجموع محيطيهما $12\pi\text{ cm}$ ، ومجموع مساحتيهما $20\pi\text{ cm}^2$. أجد قطر كل منهما.

- 16 **أعمار:** قالت شيماء: «عُمري أكبر بأربع سنواتٍ من عُمري أخي ريان، ومجموعُ مُربَّعي عُمُرنا هو 346 عامًا». ما عُمُر شيماء؟



- 17 **لوحة:** لوحةٌ مستطيلة الشكل، طولها يساوي مثلي عرضها، وطول قُطرها $\sqrt{1.25}$ m، أُحيطَ بها إطارٌ، تكلفهُ المتر الطولي الواحد منه بالدينار 2.25. أجدُ تكلفَةَ الإطار.

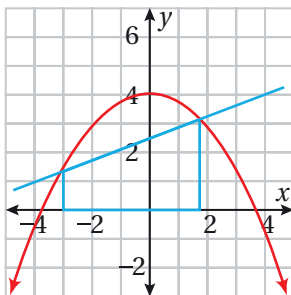
- 18 **زراعة:** قسّم فيصل 41m^2 من مزرعته إلى منطقتين مربَّعتين الشكل، ثم زرعهُما بمحصولي الطماطم والبطاطا. إذا زاد بُعد المنطقة المزروعة بالطماطم مترًا واحدًا على بُعد المنطقة المزروعة بالبطاطا، فما مساحةُ المنطقة المزروعة بكلِّ محصول؟



- 19 تُمثّل المعادلة $y = 2 + 0.12x - 0.002x^2$ مسار قذيفةٍ مدفعٍ تمَّ إطلاقها نحو تلةٍ. أجدُ إحداثيات النقطة التي اصطدمت عندها القذيفة بسفح التلة؛ إذا علمتُ أنه مستقيمٌ ومعادلته $y = 0.15x$.

مهارات التفكير العليا

- 20 **تبرير:** صُممت نافورةٌ بصورةٍ يخرج منها الماء بحسب العلاقة: $y + x^2 = 10$ ، إذا وُضعت وحدة إنارة على المستقيم الذي معادلته: $y = 12 + x$ ، فهل يصل ماء النافورة إلى وحدة الإنارة؟ أبررُ إجابتي.
- 21 **تحذُّ:** إذا علمتُ أن المستقيم الذي معادلته: $y = 3x + p$ يقطع المنحنى: $y = 2x^2 + 3x - 5$ في نقطةٍ واحدةٍ فقط، فما قيمة p ؟



- 22 **تحذُّ:** أجدُ مساحةً شبه المنحرف المرسوم باللون الأزرق أسفل منحنى الاقتران $y = -0.3x^2 + 4$ في الشكل المجاور.

حلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ من معادلتين تربيعيتين Solving a System of Two Quadratic Equations

فكرة الدرس



مسألة اليوم



حلُّ نظامٍ مُكوَّنٍ من معادلتين تربيعيتين بمُتغيَّرين.

استعملتُ خبيرةُ تسويقِ المعادلتين التربيعيتين الآتيتين لتمثيلِ مقدارِ كلِّ من العرضِ والطلبِ لسلعةٍ تجاريةٍ؛ بُغيةً تحديدِ نقاطِ التوازنِ التي يتساوى عندها العرضُ مع الطلبِ في السوقِ، حيثُ يُمثِّلُ x سعرَ الوحدةِ، ويُمثِّلُ y عددَ الوحداتِ المباعةِ. هلْ يُمكنني مساعدةُ الخبيرةِ على تحديدِ نقاطِ التوازنِ؟

$$y = x^2 + 6x$$

$$y = -x^2 + 24x$$

لِحَلِّ نظامٍ يتكوَّنُ من معادلتين تربيعيتين، تُساوى أوَّلًا المعادلتان بعضُهُما ببعضٍ لتكوينِ معادلةٍ تربيعيةٍ واحدةٍ.

مثال 1

أحلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتي، ثمَّ أتحقِّق من صحَّةِ الحَلِّ:

$$y = x^2 + 4x - 3$$

$$y = -x^2 + 2x - 3$$

عندَ تمثيلِ معادلتَي النظامِ على المستوى الإحداثيِّ نفسه، يلاحظُ أنَّ منحنيهما يتقاطعانِ في نقطتينِ كما في الشكلِ المجاور؛ ما يعني أنَّ للنظامِ حلَّينِ مختلفينِ. أتحقِّق من ذلك جبريًّا.

بدايةً، يجبُ مساواةُ معادلتَي النظامِ المعطى، ثمَّ حلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجة:

$$x^2 + 4x - 3 = -x^2 + 2x - 3$$

بمساواةِ المعادلتينِ

$$2x^2 + 2x = 0$$

بجمعِ الحدودِ المتشابهةِ، والتبسيطِ

أحلُّ المعادلةَ التربيعيةَ الناتجةَ باستعمالِ التحليلِ:

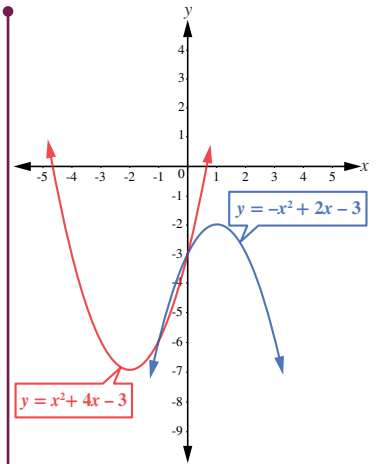
$$2x(x + 1) = 0$$

بتحليلِ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةِ

$$x = 0 \quad \text{or} \quad x = -1$$

حلًّا للمعادلةِ

لإيجادِ قيمةِ y ، أعوِّضُ قيمتي x في أيِّ من معادلتَي النظامِ:



أتذكَّرُ

يُمكنني حلُّ المعادلةِ التربيعيةِ الناتجةَ باستعمالِ القانونِ العامِّ أيضًا.

الحالة الأولى: إذا كانت $x = 0$:

$$y = -(0)^2 + 2(0) - 3$$

بتعويض $x = 0$ في إحدى المعادلتين

$$y = -3$$

بالتبسيط

إذن، الحل الأول للنظام هو: $(x, y) = (0, -3)$.

الحالة الثانية: إذا كانت $x = -1$:

$$y = -(-1)^2 + 2(-1) - 3$$

بتعويض $x = -1$ في إحدى المعادلتين

$$y = -6$$

بالتبسيط

إذن، الحل الثاني للنظام هو: $(x, y) = (-1, -6)$.

إذن، حل النظام هو: $(-1, -6)$, $(0, -3)$.

أتحقق من فهمي

أحلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتي، ثمَّ أتحقِّقُ من صحَّةِ الحلِّ:

$$y = -x^2 - 2x + 3$$

$$y = x^2 + 2x - 3$$

قد يتقاطع منحنيا معادلتين تربيعيتين في نقطة واحدة فقط، وعندئذ يكون لنظام المعادلات الذي تكونه هاتان المعادلتان حل واحد.

مثال 2: من الحياة

سباقات: في أحد سباقات المراحل، سلك مُتسابق مساراُ تمثله المعادلة التربيعية: $y = x^2$ في حين سلك مُتسابق آخر مساراُ تمثله المعادلة: $x^2 + 3x = y + 2$. أجد نقطة التقاطع بين مساري المُتسابقين.

أكتب المعادلة $x^2 + 3x = y + 2$ بالصورة القياسية (بالنسبة إلى y).

$$x^2 + 3x - 2 = y$$

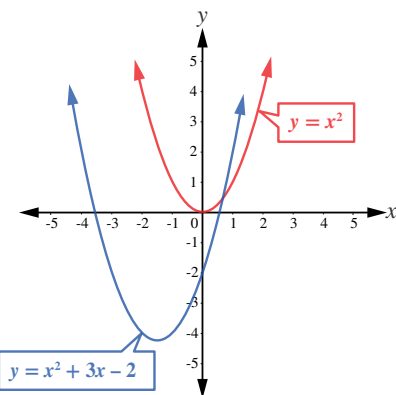
بترح 2 من الطرفين

$$y = x^2 + 3x - 2$$

باستعمال الخاصية التبديلية

عند تمثيل المعادلتين بيانياً كما في الشكل المجاور، يلاحظ وجود نقطة تقاطع واحدة بين منحنيهما؛ ما يعني أن لنظام المعادلات حلاً واحداً. أتحقق من ذلك جبرياً.

بدايةً، يجب مساواة معادلتَي النظام المعطى، ثم حل المعادلة التربيعية الناتجة:



إرشاد

للتحقُّق من صحَّةِ الحلِّ، أعرِّض قيمتَي x و y في كلِّ من معادلتَي النظام.

معلومة



تُجرى سباقات المراحل على مدار أيام، وهي تقام على مسارات متنوعة من حيث التضاريس، مثل: الطرق المُنبسطة، والطرق الجبلية.

$$x^2 + 3x - 2 = x^2$$

$$x^2 + 3x - 2 - x^2 = 0$$

$$3x - 2 = 0$$

$$x = \frac{2}{3}$$

بعد ذلك أجد قيمة y ، وذلك بتعويض قيمة $x = \frac{2}{3}$ في أي من معادلتَي النظام:

$$y = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{2}{3}\right) - 2$$

$$y = \frac{4}{9}$$

إذن، حلُّ نظامِ المعادلاتِ هو: $x = \frac{2}{3}, y = \frac{4}{9}$ ، ونقطة تقاطع المنحنيين هي: $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{9}\right)$.

أتحقق من فهمي

تزلُّج: تُمثِّل المعادلة: $y = x^2 + 2x$ مسارَ مُتزلِّجٍ على الجليد، في حين تُمثِّل المعادلة: $y = x^2 - x + 5$ مسارَ مُتزلِّجٍ آخر. أبحثُ عن جميع النقاط التي قد يصطدمُ عندها المُتزلِّجان إذا لم يكونا حذرين.

عرضنا في المثالين السابقين أنظمة معادلات تربيعية لها حلان أو حل واحد. ولكن، هل يوجد دائماً حل للنظام المكوّن من معادلتين تربيعيتين؟ أدرُس المثال الآتي.

مثال 3

أحلُّ نظامَ المعادلات الآتي:

$$y = x^2 + x + 2$$

$$y = -x^2 - x + 1$$

عند تمثيل المعادلتين بيانياً كما في الشكل المجاور، يُلاحظُ عدم وجود نقاط تقاطع بين منحنيهما؛ ما يعني عدم وجود حل لنظام المعادلات. أتحقِّق من ذلك جبرياً.

بدايةً، يجب مساواة معادلتَي النظام المعطى، ثم حلُّ المعادلة التربيعية الناتجة لإيجاد قيمة x :

$$x^2 + x + 2 = -x^2 - x + 1$$

$$2x^2 + 2x + 1 = 0$$

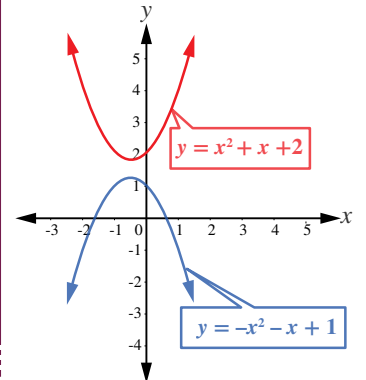
بمساواة المعادلتين

بالتبسيط

معلومة



رياضة التزلُّج هي إحدى أسرع الرياضات غير الآلية؛ فقد تصل سرعة المُتزلِّج إلى 200 km/h



بعد ذلك أجد قيمة المُمَيِّز $\Delta = b^2 - 4ac$ لتحديد إذا كان للمعادلة التربيعية الناتجة حلٌّ أم لا.

قيم المعاملات هي: $a = 2, b = 2, c = 1$. وبالتعويض في صيغة المُمَيِّز ينتج:

$$\Delta = (2)^2 - 4(2)(1) = -4$$

قيمة المُمَيِّز سالبة. إذن، لا يوجد حلٌّ للمعادلة. ومن ثمَّ، فلا يوجد حلٌّ لهذا النظام.

أتحقق من فهمي

أحلُّ نظام المعادلات الآتي:

$$y = x^2 + 4$$

$$y = -x^2 + 2$$

عرضنا في الأمثلة السابقة أنظمة لها حلان، أو حل واحد، أو ليس لها حل. ولكن، هل يوجد نظامٌ مكونٌ من معادلتين تربيعيتين، له ثلاثة حلول، أو أربعة؟ أدرس المثال الآتي.

مثال 4

أحلُّ نظام المعادلات التربيعية الآتي، ثمَّ أتحقق من صحَّة الحلِّ:

$$x^2 + y^2 = 13$$

$$x^2 - y = 7$$

عند تمثيل المعادلتين بيانياً كما في الشكل المجاور، يلاحظ وجود 4 نقاط تقاطع بين منحنيهما؛ ما يعني وجود أربعة حلول لنظام المعادلتين. أتحقق من ذلك جبرياً.

يظهر المتغيِّر x في كلتا المعادلتين بالقوَّة نفسها؛ لذا يُمكنني استعمال الحذف للتخلُّص من هذا المتغيِّر، ثمَّ حلُّ المعادلة التربيعية الناتجة التي تحوي متغيِّراً واحداً هو y :

$$x^2 + y^2 = 13$$

$$(-) \quad x^2 - y = 7$$

$$y^2 + y = 6$$

$$y^2 + y - 6 = 0$$

بالطرح

ب طرح 6 من كلا الطرفين

يُمكنني حلُّ المعادلة التربيعية الناتجة باستعمال القانون العام، أو التحليل:

$$(y + 3)(y - 2) = 0$$

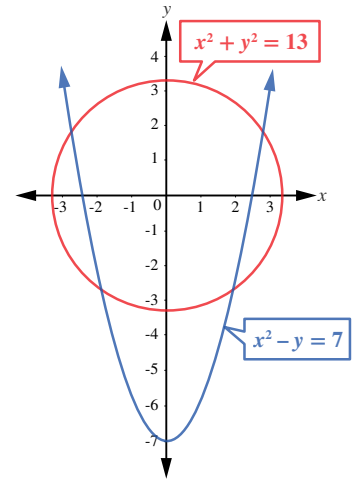
بالتحليل

$$\text{إذن: } y = -3, y = 2$$

أعوِّض قيمتي y في إحدى معادلتَي النظام لإيجاد قيم x :

$$x^2 = -3 + 7$$

بتعويض قيمة $y = -3$



$$x = \pm 2$$

$$x^2 = 2 + 7 = 9$$

$$x = \pm 3$$

بحل المعادلة

$$x = 2, x = -2$$

بتعويض قيمة $y = 2$

بحل المعادلة

إذن، توجد أربعة حلول للنظام، هي: $(-2, -3)$ ، و $(2, -3)$ ، و $(3, 2)$ ، و $(-3, 2)$.
أتحقق من صحة هذه الحلول بتعويضها في كل من معادلتَي النظام.

أتحقق من فهمي 

أحلُّ نظام المعادلات التربيعية الآتي، ثم أتحقق من صحة الحل:

$$x^2 + y^2 = 16$$

$$3y - x^2 = -12$$

أدرب وأحل المسائل 

أحلُّ كلًّا من أنظمة المعادلات التربيعية الآتية، ثم أتحقق من صحة الحل:

1 $y = 2x^2 + x - 5$
 $y = -x^2 - 2x - 5$

2 $y = x^2 - 4x + 1$
 $y = -2x^2 - 4$

3 $y = x^2 + 1$
 $y = 2x^2 - 3$

4 $y = x^2 + x + 1$
 $y = -x^2 + x - 2$

5 $y = -x^2 + 5x$
 $y = x^2 - 5x$

6 $y = x^2$
 $y = x^2 + x + 6$

7 $y = -x^2 + 6x + 8$
 $y = -x^2 - 6x + 8$

8 $x^2 + y^2 = 16$
 $y = x^2 - 5$

9 $5x^2 - 2y^2 = 18$
 $3x^2 + 5y^2 = 17$

10 أجد نقاط التقاطع بين الدائرتين:

$$x^2 + (y - 2)^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

11 عدنان، مجموع مربعيهما 89، والفرق بين مربعيهما 39، ما هذان العددان؟

12 **فيزياء:** قُذِفَت كرتان رأسياً في الوقت نفسه من موقعين مختلفين. إذا كانت المعادلة: $y = -2t^2 + 12t + 10$ تُمثِّل ارتفاع الكرة الأولى بالأمتار بعد مرور t ثانية، وكانت المعادلة: $y = -2t^2 + 4t + 42$ تُمثِّل ارتفاع الكرة الثانية، فأجد الزمن الذي يتساوى عنده ارتفاع كل من الكرتين، ثم أجد ارتفاع كل كرة في تلك اللحظة.

13 **ثقافة مالية:** بالعودة إلى مقدمة الدرس، أستعمل نظام المعادلات المعطى لإيجاد نقاط التوازن التي يتساوى عندها العرض والطلب.

14 **أحلُّ نظام المعادلات الآتي:**

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$$

$$x^2 + xy = 6$$

مهارات التفكير العليا



15 **تبرير:** قالت زينب إنه لا يوجد حلُّ لنظام المعادلات الآتي:

$$x^2 + y^2 = 4$$

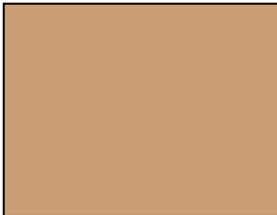
$$x^2 + y^2 = 9$$

هل قول زينب صحيح؟ أبرِّر إجابتي.

16 **مسألة مفتوحة:** أكتب نظاماً مكوناً من معادلتين تربيعيتين ليس له حلُّ.

17 **تحذُّ:** قطعة أرض على شكل مثلثٍ مُتطابقٍ الضلعين، طول ضلعيه المُتطابقين 50 m، ومساحته 1200 m^2 . أجد طول قاعدته، وارتفاعه.

18 **مسألة مفتوحة:** أكتب نظاماً من معادلتين تربيعيتين؛ على أن تكون النقطة (5, 3) أحد حلوله.



19 **تحذُّ:** قطعة من ورقٍ مَقَوَّى مستطيلة الشكل، مساحتها 216 cm^2 ، نُني طولها، ولُصِّقاً معاً، فتشكَّل أنبوبٌ أسطوانانيٌّ حجمه 224 cm^3 . أجد بُعدي قطعة الورق.



أختار رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 أي الأزواج المرتبة الآتية تمثل حلاً لنظام المعادلات:

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$3x + y = 6$$

- a) (1, 3) b) (0, 2)
c) (2, 0) d) (-2, -2)

2 أي الأزواج المرتبة الآتية يمثل حلاً لنظام المعادلات:

$$y = x^2 - 5x + 6$$

$$y = -x^2 + 2x + 3$$

- a) (0, 3) b) (1, 2)
c) (2, 0) d) (3, 0)

3 جذور المعادلة $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$ هي:

- a) -1, 1, 3 b) -1, 1, 2
c) -2, -1, 1 d) -3, -2, 3

أحل كل نظام معادلات مما يأتي، ثم أتحقق من صحة الحل:

4 $y = 4x$
 $y = 5 - x^2$

5 $y = -x^2 - x + 12$
 $y = x^2 + 7x + 12$

أحل كلًا من المعادلات الآتية:

6 $3x^4 = 27x^2$

7 $x^3 + x^2 = 4x + 4$

8 $2x^3 + 3x^2 = 8x + 12$

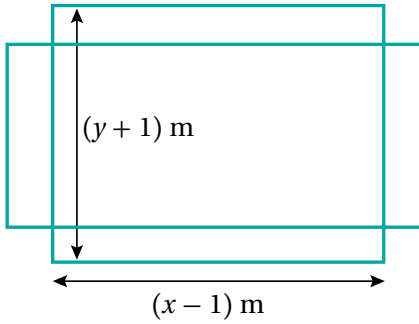
9 $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$

10 تنس: ملعب تنس طوله x مترًا وعرضه y مترًا ومساحته

224 m^2 ، إذا تمّت زيادة عرضه بمقدار 1 m وتقليل

طوله بمقدار 1 m فزادت مساحته بمقدار 1 m^2 كما

في الشكل الآتي، فأجد أبعاد ملعب التنس.



تدريب على الاختبارات الدولية

11 أجد جميع قيم p التي تجعل منحنى المعادلة الخطية

$$y = 2x + p$$

$$y = x^2 + 3x - 1$$

12 يمثل كل من X, Y عددين مفقودين في الرقم السري

$XY1290$. إذا كان مجموع العددين المفقودين 12

ومجموع مربعيهما يساوي 90 ، فأجد قيمة كل منهما.

ما أهمية هذه الوحدة؟

تُعَدُّ الدائرةُ أحدَ أكثرِ الأشكالِ ظهورًا على سطحِ الأرضِ، بل في جميعِ الكونِ. فهي تَظهرُ جليًّا في بؤبؤِ العينِ، وفي الفاكهةِ، وجذوعِ الأشجارِ، وغيرِ ذلكَ من المخلوقاتِ. وقد استفادَ الإنسانُ من الخصائصِ الفريدةِ لهذا الشكلِ المُعقَّدِ في مجالاتٍ عدَّةٍ، مثل: الهندسةِ، والصناعةِ.

سأتعلَّمُ في هذه الوحدة:

- ◀ حسابَ طولِ القوسِ، ومساحةِ القطاعِ الدائريِّ.
- ◀ العلاقاتِ بينَ الزوايا في الدائرة، والإفادةَ منها في إيجادِ زوايا مجهولة.
- ◀ كتابةَ معادلةِ الدائرة، وإيجادَ المركزِ ونصفِ القطرِ من معادلةِ دائرة معلومة.

تعلَّمتُ سابقًا:

- ✓ إيجادَ محيطِ الدائرة، ومساحتها.
- ✓ تمييزَ حالاتِ تطابقِ المثلثاتِ، وتشابُّهها.
- ✓ إيجادَ مجموعِ قياسِ زوايا كلِّ من المثلثِ، والشكلِ الرباعيِّ.
- ✓ إيجادَ المسافةِ بينَ نقطتينِ في المستوى الإحداثيِّ، وإحداثياتِ نقطةِ المنتصفِ.

البحث عن استعمالات علمية لخصائص الدائرة، ووصفها، ونمذجتها.

فكرة المشروع:



شبكة الإنترنت، برمجية جيو جبرا.

المواد والأدوات:



خطوات تنفيذ المشروع:



1 أبحث مع أفراد مجموعتي في مكتبة المدرسة (أو في شبكة الإنترنت) عن نموذج

علمي أو حياتي تستعمل فيه إحدى الخصائص الآتية للدائرة:

- العلاقة بين الزوايا المركزية والزوايا المحيطة.
- العلاقة بين الزوايا المماسية والزوايا المحيطة المشتركة معها في القوس نفسه.
- معادلة الدائرة.

2 أكتب في مستند معالجة النصوص (وورد) فقرة أصف فيها النموذج الحياتي أو العلمي الذي اخترته، مُحددًا خصائص

الدائرة الموجودة في هذا النموذج، ثم أفسرها.

3 أضيف إلى المستند صورًا توضيحية للنموذج، ذاكراً مصدر المعلومات والصور.

4 أستعمل برمجية جيو جبرا لرسم شكل يوضح استعمال الخاصية في النموذج، وأضع عليه قياسات الزوايا وأطوال

الأضلاع جميعها. وهذه بعض الإرشادات التي قد تساعد على رسم الشكل التوضيحي باستعمال برمجية جيو جبرا:

• لرسم دائرة، انقر على أيقونة Circle with Center through Point من شريط الأدوات.

• لإيجاد قياس زاوية، انقر على أيقونة Angle ، ثم على ضلع ابتداء الزاوية، وضلع انتهائها.

• لإيجاد طول قطعة مستقيمة، انقر على أيقونة Distance or Length ، ثم على القطعة المستقيمة.

• لرسم مماس للدائرة من نقطة خارجها، أحدد أولاً النقطة بالنقر على أيقونة Point ، ثم أيقونة Tangents .

عرض النتائج:

أعد مع أفراد مجموعتي عرضًا تقديميًا نبيّن فيه ما يأتي:

- خطوات تنفيذ المشروع موصّحة بالصور والرسوم، بما في ذلك صورة الشكل الذي رسمه باستعمال برمجية جيو جبرا.
- معلومة جديدة تعرّفناها في أثناء العمل بالمشروع، ومقترح لتوسعة المشروع.

أوتار الدائرة، وأقطارها، ومماساتها Chords, Diameters and Tangents of a Circle

معرفة الوتر، والقُطر، والمماس، وخصائص كلٍّ منها، والعلاقات التي تربط بعضها ببعض، وتوظيف ذلك في إيجاد أطوال مجهولة وقياسات زوايا مجهولة.

الدائرة، مركز الدائرة، الوتر، القوس، القُطر، نصف القُطر، المماس، نقطة التماس، القاطع.



في حديقة منزل عيبر طاولة دائرية، وهي تريد عمل فتحة عند مركزها لتثبيت عمود يحمل مظلة بها. كيف يمكن لعبير تحديد مركز الطاولة؟

فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



الدائرة (circle) هي المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى، بحيث تظل على البعد نفسه عن نقطة مُحددة تُسمى **مركز الدائرة** (center). أما **الوتر** (chord) فهو قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين على الدائرة، ويُسمى الوتر الذي يمر بمركز الدائرة **القُطر** (diameter). ويُطلق على القطعة المستقيمة التي تصل مركز الدائرة بنقطة عليها اسم **نصف القُطر** (radius).

القاطع (secant) هو مستقيم يقطع الدائرة في نقطتين، ويحوي وترًا فيها. أما المستقيم الذي يشترك مع الدائرة في نقطة واحدة فقط فيسمى **المماس** (tangent). ويُطلق على نقطة التقاء المماس بالدائرة اسم **نقطة التماس** (point of tangency).

مثال 1

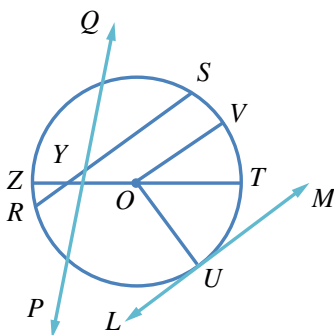
يُمثل الشكل المجاور دائرة مركزها O . أَسْمِي:

1 مماسًا للدائرة.

\overleftrightarrow{LM}

2 أربعة أنصاف أقطار.

\overline{OV} , \overline{OT} , \overline{OZ} , \overline{OU}



رموز رياضية

- ترمز \overleftrightarrow{LM} إلى المستقيم LM .
- ترمز LM إلى طول القطعة المستقيمة. أما \overline{LM} فترمز إلى القطعة المستقيمة نفسها.

3 قُطْرًا للدائرة.
 \overline{ZT}

4 وترًا للدائرة.
 $\overline{SR}, \overline{ZT}$

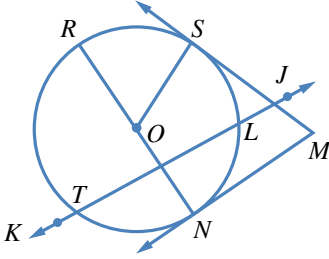
أتحقق من فهمي

يُبيِّن الشكل المجاور دائرة مركزها O . أَسْمِي:

(a) قاطعًا للدائرة.

(b) وترًا للدائرة.

(c) مماسًا للدائرة.



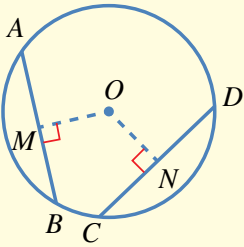
أوتار الدائرة

نظريات

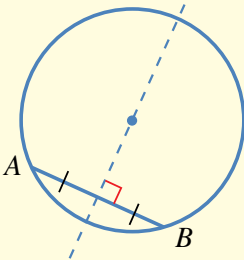
1 الوتران المُتطابقان يبعدان المسافة نفسها عن مركز الدائرة. والوتران اللذان يبعدان المسافة نفسها عن مركز الدائرة مُتطابقان.

مثال: بما أن $CD = AB$ ، فإن $OM = ON$.

وإذا كان $OM = ON$ ، فإن $AB = CD$.



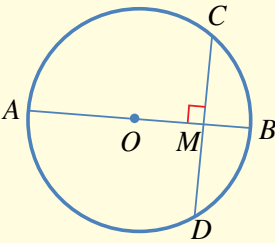
2 المُنصفُ العموديُّ لأيِّ وترٍ في الدائرة يمرُّ بمركزها. مثال: في الشكل المجاور، يقع مركز الدائرة على الخط المُتقطع.



3 نصفُ القُطرِ العموديُّ على وترٍ في دائرة يُنصفُ ذلك الوتر.

مثال: بما أن $AB \perp CD$ ، فإن $MC = MD$. وإذا

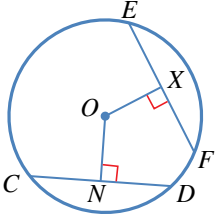
مرَّ القُطرُ بمنتصف وترٍ فإنه يعامده.



رموز رياضية

يدلُّ الرمز \perp على تعامد قطعيتين، أو مستقيمين.

مثال 2



في الشكل المجاور، \overline{CD} و \overline{EF} وتران في دائرة مركزها O . إذا كان $ON = OX$ ، و $EF = 8 \text{ cm}$ ، فما طول \overline{NC} ؟

ON و OX يُمثَلان بُعدي الوترين CD و EF عن مركز الدائرة، وهما مُتطابقان.

من معطيات السؤال $ON = OX$

إذا تساوى بُعدا وترين عن مركز الدائرة، فهما مُتطابقان $CD = EF$

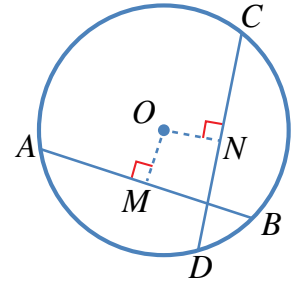
نصف القطر العمودي على وتر يُنصفه $NC = \frac{1}{2} CD$

الوتران \overline{CD} و \overline{EF} مُتطابقان $= \frac{1}{2} EF$

بالتعويض $= \frac{1}{2} (8) = 4 \text{ cm}$

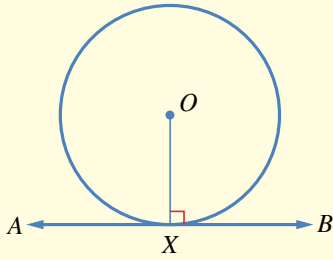
أتحقق من فهمي

في الشكل المجاور، \overline{CD} و \overline{AB} وتران في دائرة مركزها O . إذا كان $OM = ON$ ، و $CN = 12 \text{ cm}$ ، فما طول \overline{AB} ؟



مماسات الدائرة

نظريات

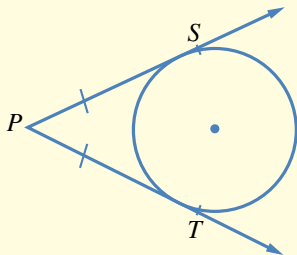


1 مماس الدائرة يكون عمودياً على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس.

مثال: نصف القطر \overline{OX} عمودي على

المماس \overleftrightarrow{AB} .

$\overline{OX} \perp \overleftrightarrow{AB}$



2 القطعتان المماسيتان المرسومتان للدائرة من نقطة خارجها لهما الطول نفسه.

مثال: \overline{PT} و \overline{PS} لهما الطول نفسه: $PS = PT$.

رموز رياضية

يدل \overleftrightarrow{PT} على مماس الدائرة. أما \overline{PT} فيدل على القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطة P ونقطة التماس، ويدل الرمز PT على طول هذه القطعة.

مثال 3

في الشكل المجاور، \overrightarrow{TP} و \overrightarrow{TQ} مماسان لدائرة مركزها O :

1 أجد قيمة x .

قطعان مماسيتان مرسومتان للدائرة من نقطة خارجها

$$TP = TQ$$

بالتعويض

$$2x + 3 + 6 - 2x = 4x - 6 + 6 - 2x$$

بإضافة $6 - 2x$ إلى الطرفين

$$9 = 2x$$

بالتبسيط

$$x = \frac{9}{2}$$

2 أجد قياس الزاوية POQ .

أفترض أن قياس الزاوية POQ هو y :

$$m\angle OQT = m\angle OPT = 90^\circ$$

مماس الدائرة يتعامد مع نصف القطر في نقطة التماس

$$90^\circ + 70^\circ + 90^\circ + y = 360^\circ$$

مجموع قياس الزوايا الداخلية للشكل الرباعي هو 360°

$$250^\circ + y = 360^\circ$$

بالتبسيط

$$y = 360^\circ - 250^\circ = 110^\circ$$

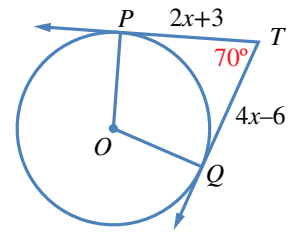
ب طرح 250° من الطرفين

أتحقق من فهمي

في الشكل المجاور، \overrightarrow{TP} و \overrightarrow{TQ} مماسان لدائرة مركزها O :

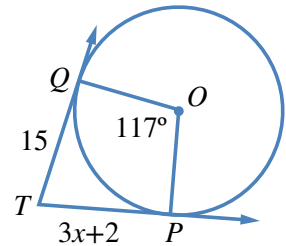
(b) أجد قياس الزاوية PTQ .

(a) أجد قيمة x .



رموز رياضية

يرمز الحرف m في $m\angle OQT$ إلى قياس الزاوية OQT .



مثال 4: من الحياة

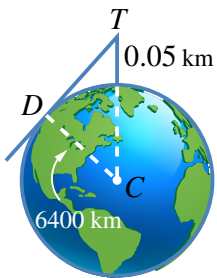


أبراج: يرتفع برج مراقبة 50 m عن مستوى الأرض.

ما أبعد نقطة على الأرض يمكن مشاهدتها من قمة البرج،

بافتراض أن الأرض كرة طول نصف قطرها 6400 km تقريباً؟

أرسم مخططاً يمثل المسألة.



الدائرة تُمثّل الأرض، والنقطة T تُمثّل قَمّة البرج، والمماس \overleftrightarrow{TD} يُمثّل خطّ البصر، ونقطة التماس D هي أبعد نقطة يُمكنُ مشاهدتها من قَمّة البرج. ارتفاع البرج $50 \text{ m} = 0.05 \text{ km}$

$$m\angle TDC = 90^\circ$$

المماس يتعامد مع نصف القطر عند نقطة التماس

$$(CT)^2 = (TD)^2 + (CD)^2$$

نظرية فيثاغورس

$$(6400 + 0.05)^2 = (TD)^2 + (6400)^2$$

بالتعويض

$$40960640.0025 = (TD)^2 + 40960000$$

باستعمال الآلة الحاسبة

$$640.0025 = (TD)^2$$

بترح 40960000 من الطرفين

$$25.3 \approx TD$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

إذن، المسافة التي تُمثّل أبعد نقطة على الأرض يُمكنُ مشاهدتها من قَمّة البرج هي: 25 km تقريباً.

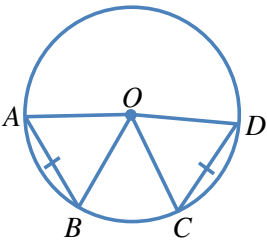
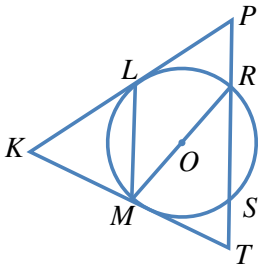
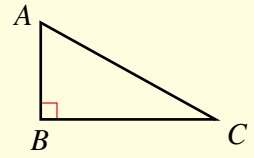
أتحقق من فهمي

برج مراقبة: تبعد أقصى نقطة يُمكنُ مشاهدتها من قَمّة برج مراقبة مسافة 32 km عنه. ما ارتفاع قَمّة البرج عن سطح الأرض، بافتراض أن الأرض كرة طول نصف قطرها 6400 km تقريباً.

أتذكّر

نظرية فيثاغورس: إذا كان المثلث ABC قائم الزاوية في B ، فإن:

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

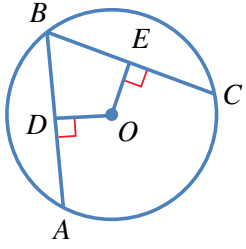


يُمثّل الشكل المجاور دائرة مركزها O . أسمّي:

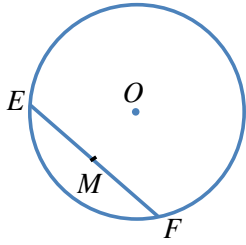
- 1 نصفَي قُطرَيْن.
- 2 وترَيْن.
- 3 مماسَيْن.
- 4 قاطعًا.

\overline{AB} و \overline{CD} وترانٍ لهما الطول نفسه في دائرة مركزها O :

- 5 ما نوع المثلث AOB ؟ أبرر إجابتي.
- 6 هل المثلثان AOB و COD مُتطابقان؟ أبرر إجابتي.
- 7 إذا كان قياس الزاوية OAB هو 65° ، فما قياس الزاوية COD ؟



- 8 في الشكل المجاور، \overline{AB} و \overline{CB} وتران مُتطابقان في دائرة مركزها O .
إذا كان $OE = x + 9$ ، و $OD = 3x - 7$ ، فما قيمة x ؟

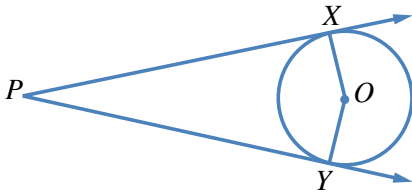


في الشكل المجاور، وتر \overline{EF} وتر في دائرة مركزها O ، والنقطة M هي منتصف الوتر \overline{EF} :

- 9 هل المثلثان EOM ، و FOM مُتطابقان؟ أبرر إجابتي.

- 10 هل الزاوية EMO قائمة؟ أبرر إجابتي.

- 11 إذا كان قياس الزاوية MOF هو 72° ، فما قياس الزاوية MEO ؟ أبرر إجابتي.

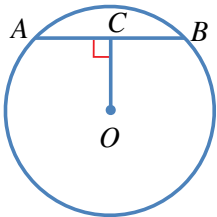


في الشكل المجاور، \overrightarrow{PX} و \overrightarrow{PY} مماسان لدائرة مركزها O :

- 12 هل قياس الزاوية PXO هو 90° ؟ أبرر إجابتي.

- 13 أبين أن المثلثين XPO و YPO مُتطابقان.

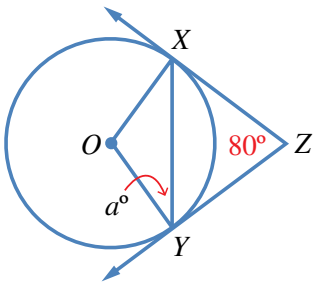
- 14 إذا كان قياس الزاوية XPO هو 17° ، فما قياس الزاوية XOY ؟



15 في الشكل المجاور، وتر طوله 6 cm في دائرة مركزها O . إذا كان قياس

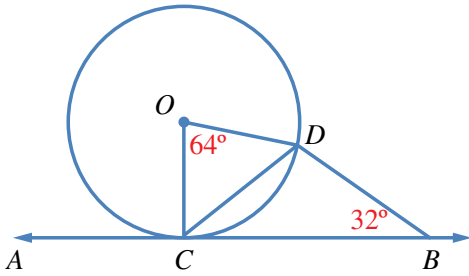
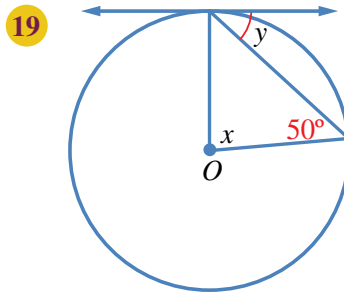
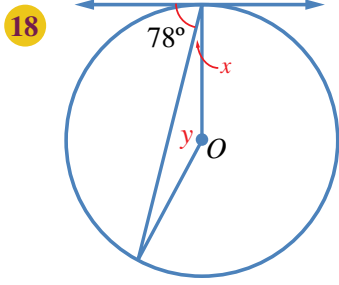
الزاوية ACO هو 90° ، و $OC = 4$ cm، فما طول نصف قطر الدائرة؟

- 16 أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.



17 في الشكل المجاور، \overrightarrow{ZX} و \overrightarrow{ZY} مماسان لدائرة مركزها O . أجد قيمة a .

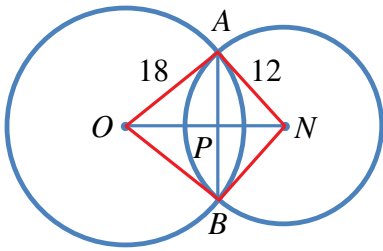
يُظهِرُ فِي كُلِّ مِنَ الشَّكْلَيْنِ الْآتِيَيْنِ مِمَّا سَّ لِدَائِرَةٍ مَرَكُزُهَا O . أَجِدْ قِيَمَةَ x وَ y فِي كُلِّ حَالَةٍ.



20 في الشكل المجاور، \overleftrightarrow{AB} مماسٌ لدائرة مركزها O في النقطة C . لماذا يُعَدُّ المثلث BCD مُتطابِقَ الضلعين؟ أبرِّرْ إجابتي.

21 كم مماساً يُمكن أن يُرسمَ للدائرة من نقطةٍ عليها، ومن نقطةٍ خارجها، ومن نقطةٍ داخلها؟ أبرِّرْ إجابتي.

مهارات التفكير العليا



22 تحدُّ \overline{AB} وترٌ مشتركٌ بين دائرتين متقاطعتين، وهو عموديٌّ على القطعة المستقيمة \overline{ON} الواصلة بين مركزيهما. إذا كان $AB = 14$ cm، فما طول \overline{ON} ؟ أبرِّرْ إجابتي.

23 برهان: \overline{AB} ، و \overline{CD} وترانٍ متساويانٍ في دائرة مركزها N . أثبت أن لهما البعد نفسه عن النقطة N .

24 تبرير: \overleftrightarrow{AB} مماسٌ لدائرة مركزها N في النقطة A ، وطول نصف قطرها 3 cm، و $BA = 5$ cm. قالت سارة إن $BN = 4$ cm؛ لأن $(BN)^2 = (BA)^2 - (AN)^2 = 16$. هل قول سارة صحيح؟ أبرِّرْ إجابتي.

الأقواس والقطاعات الدائرية

Arcs and Sectors

حساب طول القوس، ومساحة القطاع الدائري، وحل مسائل تتعلق بهما.

فكرة الدرس



المصطلحات

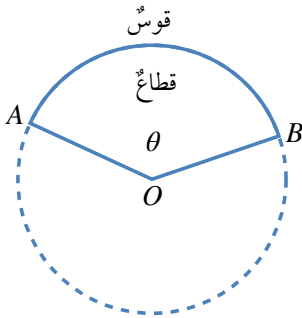


مسألة اليوم



أعد سعيد فطيرة بيتزا في وعاء دائري طول قطره 24 cm. وبعد أن خبزها أحدث فيها شقين من المركز إلى الطرف، بحيث كان قياس الزاوية بينهما 45° . كيف يمكن إيجاد مساحة الجزء الذي قطعه سعيد من الفطيرة؟

القوس (arc) هو جزء من الدائرة مُحدّد بنقطتين عليها. **القطاع** (sector) هو الجزء المحصور بين قوسٍ منها ونصفي القطرين اللذين يمران بطرفي القوس.

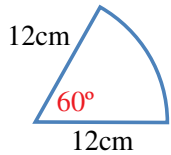


تمثل الزاوية AOB في الشكل المجاور زاوية القطاع الذي يُعدُّ كسرًا من الدائرة. ويمكن استعمال قياس زاوية القطاع لكتابة هذا الكسر، وذلك بقسمة قياس الزاوية على الدورة الكاملة؛ أي: $\frac{\theta}{360^\circ}$ ، حيث θ قياس زاوية القطاع.

مثال 1

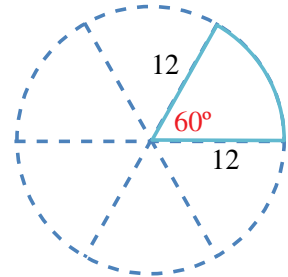
يُمثل الشكل المجاور قطاعًا دائريًا. أجد:

1 طول القوس (أكتب الإجابة بدلالة π).



القطاع كسر من الدائرة، وهذا الكسر هو $\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$. وبما أن طول قطر الدائرة 24 cm، فإن طول محيطها: $24 \times \pi = 24\pi$ cm. إذن، طول القوس يساوي $\frac{1}{6}$ طول محيط الدائرة؛ أي:

$$24\pi \div 6 = 4\pi \text{ cm}$$



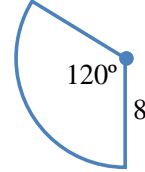
2 مساحة القطاع.

مساحة الدائرة هي: $\pi \times 12^2 = 144\pi \text{ cm}^2$

مساحة القطاع تساوي $\frac{1}{6}$ مساحة الدائرة؛ أي: $144\pi \div 6 = 24\pi \text{ cm}^2$

أتحقق من فهمي

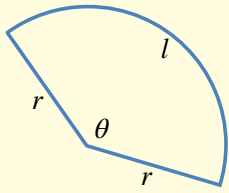
يُمثِّل الشكل المجاور قطاعًا دائريًا. أجد طول القوس، ومساحة القطاع الدائري.



تعرَّفنا في المثال السابق أنَّ القطاع هو كسرٌ من الدائرة، وأنَّه يُمكن دائمًا استعمال قياس زاوية القطاع لحساب طول القوس ومساحة القطاع الدائري.

طول قوس القطاع الدائري ومساحته

مفهوم أساسي

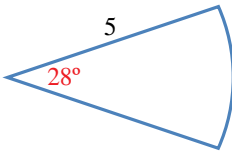


إذا كان قياس زاوية القطاع θ° ، وطول نصف قطر الدائرة r ، وطول القوس l ، ومساحة القطاع A ، فإن:

$$l = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$$

$$A = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$

مثال 2



أجد طول القوس ومساحة القطاع في الشكل المجاور.

زاوية القطاع هي 28° ، وطول نصف القطر هو 5 وحدات طول:

$$l = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$$

قانون طول القوس

$$l = \frac{28^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 2 \times 5$$

بتعويض $\theta = 28^\circ$, $r = 5$

$$\approx 2.4$$

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، طول هذا القوس مُقرَّبًا إلى أقرب منزلة عشرية واحدة هو: 2.4 وحدة طول.

$$A = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$

قانون مساحة القطاع

$$= \frac{28^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 5^2$$

بتعويض $r = 5$, $\theta = 28^\circ$

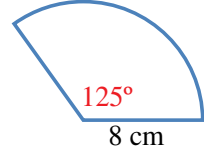
$$\approx 6.1$$

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، مساحة هذا القطاع مُقَرَّبَةً إلى أقرب منزلة عشرية واحدة هي: 6.1 وحدة مربعة.

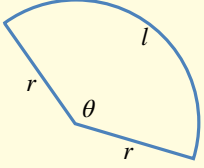
أتحقق من فهمي

أجد طول القوس ومساحة القطاع في الشكل المجاور.



محيط القطاع الدائري

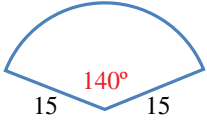
مفهوم أساسي



محيط القطاع الدائري (L) هو المسافة حول القطاع، وهي تساوي طول قوس القطاع، مضافاً إليه مثلاً طول نصف قطر الدائرة:

$$L = \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r + 2r$$

مثال 3



أجد محيط القطاع الدائري في الشكل المجاور، مُقَرَّبًا إجابتني إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

زاوية القطاع هي 140° ، وطول نصف القطر هو 15 وحدة طول:

$$\begin{aligned} L &= \frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r + 2r \\ &= \left(\frac{140^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \pi \times 15\right) + 2 \times 15 \\ &\approx 66.6519 \end{aligned}$$

قانون محيط القطاع

$$r = 15, \theta = 140^\circ \text{ بتعويض}$$

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، محيط هذا القطاع مُقَرَّبًا إلى أقرب منزلة عشرية واحدة هو: 66.7 وحدة طول.

أتحقق من فهمي

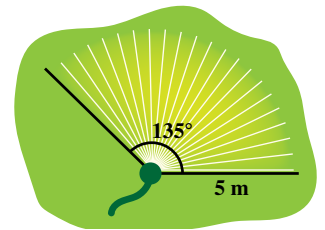
أجد محيط قطاع دائري زاويته 225° ، في دائرة طول نصف قطرها 50 cm، مُقَرَّبًا إجابتني إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

رموز رياضية

يرمز الحرف l إلى طول القوس، ويرمز الحرف L إلى محيط القطاع.

مثال 4: من الحياة

حديقة منزل وُضِعَ في أحد أطرافها مَرَشٌ للماء، يدور حول الرأس بزواوية مقدارها 135° ، فيصل الماء إلى مسافة 5 m من المَرَش. أجد مساحة المنطقة التي سيروها هذا المَرَش، مُقَرَّبًا إجابتني إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.



تمثل المنطقة التي سيروها المرش قطاعاً دائرياً زاويته 135° ، وطول نصف قطره 5 m:

$$A = \frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$$

$$= \frac{135^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 5^2$$

$$\approx 29.5$$

قانون مساحة القطاع

$$r = 5, \theta = 135^\circ$$

باستعمال الآلة الحاسبة

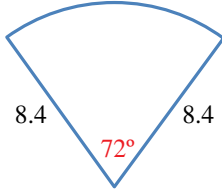
إذن، مساحة هذه المنطقة مُقَرَّبَةً إلى أقرب منزلة عشرية واحدة هي: 29.5 m^2

أتحقق من فهمي 

طول عقرب الدقائق في ساعة حائط هو 15 cm. ما مساحة المنطقة التي يُعطيها العقرب في أثناء حركته من العدد 9 إلى العدد 2؟

أدرب وأحل المسائل 

يُمثل الشكل المجاور قطاعاً دائرياً:



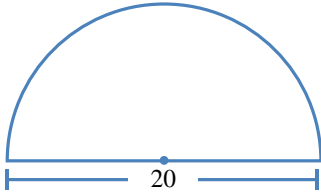
1 أُعبر بكسرٍ عن الجزء الذي يُمثله هذا القطاع من الدائرة.

2 أجد طول القوس، مُقَرَّباً إجابتي إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

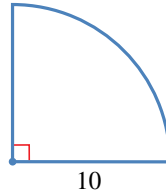
3 أجد مساحة القطاع، مُقَرَّباً إجابتي إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

أجد طول القوس ومساحة القطاع في كلٍّ من الأشكال الآتية (أكتب الإجابة بدلالة π):

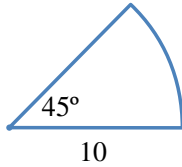
4



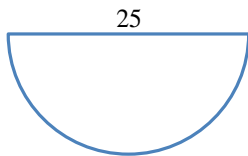
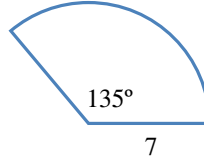
5



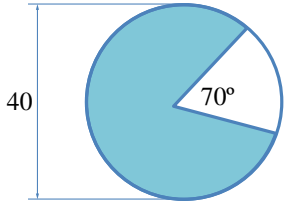
6



7

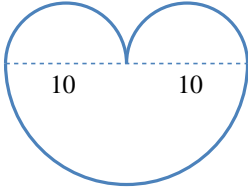


8 أجد مساحة نصف الدائرة المجاورة، ثم أجد محيطها.



9 أجد مساحة الجزء المُظلل في الشكل المجاور (أكتب الإجابة بدلالة π). أبرّر إجابتي.

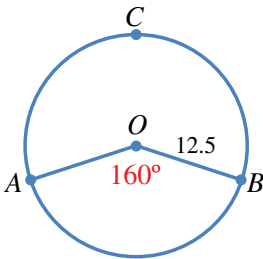
10 أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.



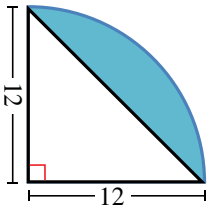
يُمثل الشكل المجاور 3 أنصاف دوائر:

11 أجد محيط الشكل (أكتب الإجابة بدلالة π).

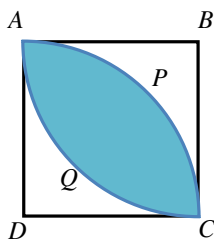
12 أجد مساحة الشكل (أكتب الإجابة بدلالة π).



13 تُمثل النقطة O مركز دائرة، طول نصف قطرها 12.5 وحدة طول. أجد طول القوس ACB.

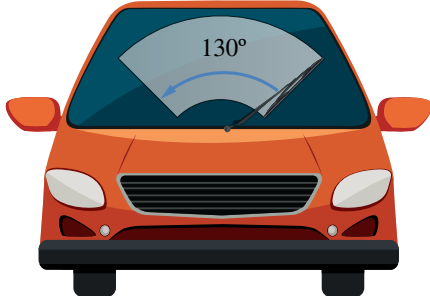


14 يُمثل الشكل المجاور ربع دائرة. أجد مساحة الجزء المُظلل في الشكل (أكتب الإجابة بدلالة π).



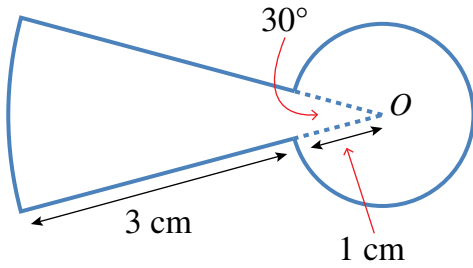
15 يُمثل الشكل المجاور المربع ABCD الذي ضلعه 8 cm، ويُمثل APC و AQC قوسين من دائرتين مركزاهما D و B على التوالي. أجد مساحة الجزء المُظلل (أكتب الإجابة بدلالة π).

16 صمّم مهندس مرش مياه لري منطقة مساحتها 100 m^2 على هيئة قطاع دائريّ طول نصف قطره 15 m. ما زاوية دوران هذا المرش؟



- 17 **سيارات:** يُبين الشكل المجاور مساحة الزجاج الأمامي لسيارة. إذا كان طول شفرة الماسحة 40 cm، وطول شفرة الماسحة مع ذراعها 66 cm، فما مساحة الزجاج التي تُنظفها الماسحة، مُقربةً إلى أقرب منزلة عشرية واحدة؟

مهارات التفكير العليا

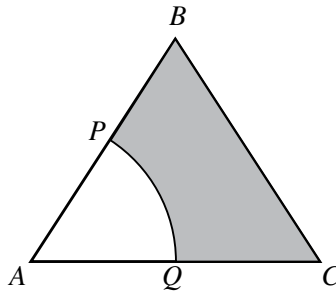


- 18 **تحذ:** أجد محيط الشكل المجاور ومساحته.



- 19 **تحذ:** اشترت عفاف فطيرة بيتزا دائرية الشكل طول قطرها 36 cm، ثم قسمتها إلى قطع متساوية. بعد ذلك أكلت منها قطعتين تُمثلان معاً 180 cm^2 منها. أجد قياس الزاوية لقطعة البيتزا الواحدة، مُقرباً إجابتي إلى أقرب عدد كلي.

- 20 **تحذ:** يُمثل الشكل المجاور مثلثاً مُتطابق الأضلاع، طول ضلعه 6 cm. إذا كانت النقطتان P و Q تُنصفان الضلعين AB و AC على التوالي، وكان APQ قطاعاً دائرياً من دائرة مركزها A ، فأجد مساحة الجزء المُظلل.



الزوايا في الدائرة Angles in a Circle

معرفة العلاقات بين الزوايا في الدائرة، وتوظيفها في إيجاد زوايا مجهولة وحل مسائل حياتية.

فكرة الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم

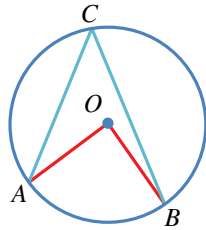


الزاوية المركزية، الزاوية المحيطية، القوس المقابل، الزاوية المُقابلَة لقطر الدائرة، الرباعي الدائري، الزاوية المماسية.



يُمثل الشكل المجاور تصميمًا مُكوّنًا من نجمة خماسية منتظمة محاطة بدائرة يحيطُ بها مربع. ماذا تُسمّى الزوايا عند رؤوس النجمة؟ كيف نجد قياس كل منها؟

تُسمّى الزاوية التي يكون رأسها في مركز الدائرة، وضلعها نصفَي قُطرين للدائرة زاويةً مركزيةً (central angle). ففي الشكل الآتي، AOB زاويةً مركزيةً في الدائرة التي مركزها O ، ويُسمّى القوس \widehat{AB} القوس المُقابل (subtended arc).

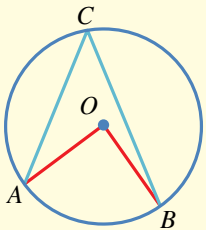


يُسمّى \widehat{AB} القوس الأصغر، ويُسمّى \widehat{ACB} القوس الأكبر.

تُسمّى الزاوية التي يقع رأسها على الدائرة، ويكون ضلعها وترين في الدائرة زاويةً محيطيةً (inscribed angle). ففي الشكل السابق، الزاوية ACB محيطية، والزاوية AOB مركزية، وهما مرسومتان على القوس \widehat{AB} . وعند قياس هاتين الزاويتين سنجد أن قياس الزاوية المركزية AOB يساوي مثلي قياس الزاوية المحيطية ACB .

الزاوية المركزية والزاوية المحيطية

نظرية



قياس الزاوية المركزية يساوي مثلي قياس الزاوية المحيطية المرسومة على القوس نفسه:

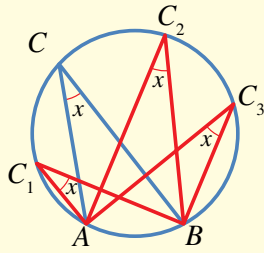
$$m\angle AOB = 2m\angle ACB$$

أفكر

ما قياس الزاوية المحيطية المقابلة للقطر؟

الزوايا المحيطية المرسومة على قوسٍ واحدٍ

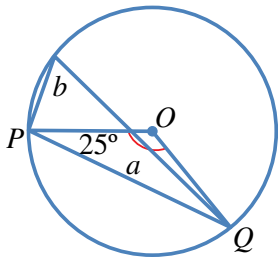
نظرية



جميع الزوايا المحيطية المرسومة على قوسٍ واحدٍ في دائرة لها القياس نفسه:

$$m\angle ACB = m\angle AC_1B = m\angle AC_2B = m\angle AC_3B$$

مثال 1



إذا كانت النقطة O هي مركز الدائرة في الشكل المجاور،

فما قياس الزاويتين المشار إليهما بالحرفين a و b ؟

المثلث OPQ متطابق الضلعين؛ لأن \overline{OP} و \overline{OQ} نصفاً قطريين في الدائرة ومجموع قياسات زوايا المثلث هو 180° . إذن:

$$m\angle POQ + m\angle OQP + m\angle OPQ = 180^\circ$$

$$a + 25^\circ + 25^\circ = 180^\circ$$

$$a + 50^\circ = 180^\circ$$

$$a + 50^\circ - 50^\circ = 180^\circ - 50^\circ$$

$$a = 130^\circ$$

$$b = 130^\circ \div 2$$

$$= 65^\circ$$

في المثلث متطابق الضلعين تتطابق زاويتا القاعدة

بالتبسيط

ب طرح 50° من الطرفين

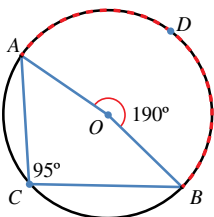
قياس الزاوية المركزية يساوي مثلي قياس

الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس نفسه

بالتبسيط

أتتحقق من فهمي

إذا كانت النقطة O هي مركز الدائرة في الشكل المجاور، فما قيمة كل من x و y ؟



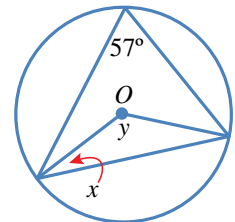
قد يكون قياس الزاوية المركزية أكبر من 180° . ففي الشكل

المجاور، الزاوية AOB مُقَابِلَةٌ للقوس ADB ، وقياسها 190° ، وهو

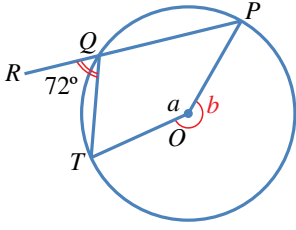
ضعف قياس الزاوية المحيطية ACB .

أتذكر

زاويتا قاعدة المثلث متطابق الضلعين متساويتان في القياس.



مثال 2



إذا كانت النقطة O هي مركز الدائرة في الشكل المجاور، والنقاط P, Q, R على استقامة واحدة، فما قياس الزاوية a ؟

$$m\angle PQT = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$$

$$a + b = 360^\circ$$

$$b = 2 \times 108^\circ = 216^\circ$$

$$a + 216^\circ = 360^\circ$$

$$a = 360^\circ - 216^\circ = 144^\circ$$

الزاويتان PQT, RQT تُشكّلان زاويةً مستقيمةً

مجموع قياسات الزوايا حول نقطة هو 360°

قياس الزاوية المركزية يساوي مثلي قياس

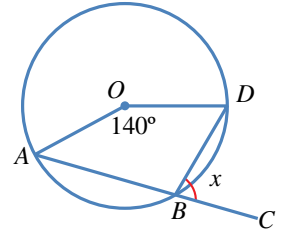
الزاوية المحيطية المرسومة على القوس نفسه

بتعويض قيمة b

ب طرح 216° من الطرفين

أتحقق من فهمي

إذا كانت النقطة O هي مركز الدائرة في الشكل المجاور، والنقاط A, B, C على استقامة واحدة، فما قيمة x ؟



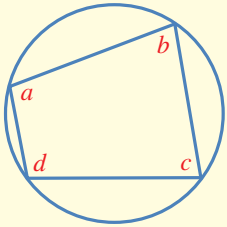
أتذكر

- قياس الزاوية المستقيمة هو 180° .
- مجموع قياسات الزوايا حول نقطة هو 360° .

إذا وقعت رؤوس مُضلع رباعي على دائرة، فإنه يُسمى **رباعياً دائرياً** (cyclic quadrilateral). وإذا حسبنا مجموع قياسي كل زاويتين متقابلتين فيه، فإنه يكون 180° .

المضلع الرباعي الدائري

نظرية



مجموع قياسي كل زاويتين متقابلتين في المضلع الرباعي الدائري هو 180° :

$$b + d = 180^\circ, a + c = 180^\circ$$

مثال 3

إذا كانت النقطة O هي مركز الدائرة في الشكل المجاور، فما قيمة كل من x و y ؟

$$m\angle ACO = 43^\circ$$

$$y + m\angle ACO = 90^\circ$$

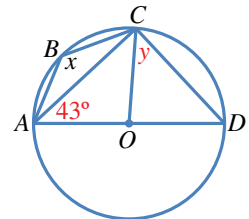
$$y + 43^\circ = 90^\circ$$

المثلث ACO متطابق الضلعين

الزاوية ACD محيطية مشتركة مع الزاوية

المركزية AOD بالقوس نفسه

بالتعويض



$$y = 90^\circ - 43^\circ$$

$$= 47^\circ$$

$$x + m\angle ADC = 180^\circ$$

$$m\angle ADC = y = 47^\circ$$

$$x + 47^\circ = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - 47^\circ$$

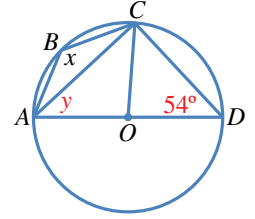
$$= 133^\circ$$

ب طرح 43° من الطرفين

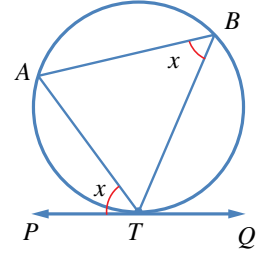
الشكل $ABCD$ رباعيٌّ دائريٌّ
المثلث OCD مُتطابقُ الضلعين
بتعويض قيمة y
ب طرح 47° من الطرفين

أتحقق من فهمي

إذا كانت النقطة O هي مركز الدائرة في الشكل المجاور، فما قيمة كل من x و y ؟



في الشكل المجاور، \overleftrightarrow{PQ} هو مماسٌ للدائرة عند النقطة T ، و \overline{TA} هو وترٌ للدائرة. تُسمى الزاوية المحصورة بين المماس والوتر المارَّ بنقطة التماس الزاوية المماسية (angle between a tangent and a chord). وهذه الزاوية تحصرُ القوس \widehat{TA} ، ويُمكن ملاحظة أن قياس الزاوية المماسية PTA يساوي قياس الزاوية المحيطية المرسومة على القوس \widehat{TA} نفسه.



الزاوية المماسية والزاوية المحيطية

نظرية

قياس الزاوية المماسية يساوي قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في القوس:

$$m\angle ATP = m\angle ABT$$

مثال 4

في الشكل المجاور، \overleftrightarrow{AB} مماسٌ للدائرة في T . أجد قياس كل من الزاويتين ATS و TSR .

$$m\angle ATS = m\angle TRS = 80^\circ$$

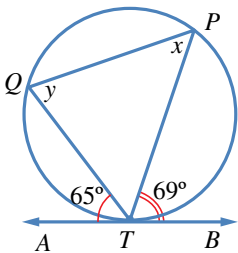
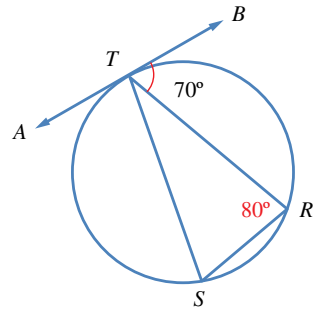
$$m\angle TSR = m\angle BTR = 70^\circ$$

زاويتان (مماسية، ومحيطية) مشتركتان في القوس

زاويتان (مماسية، ومحيطية) مشتركتان في القوس

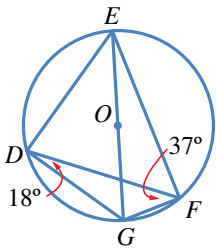
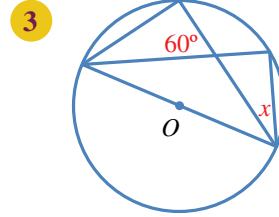
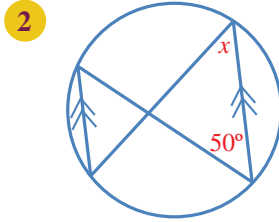
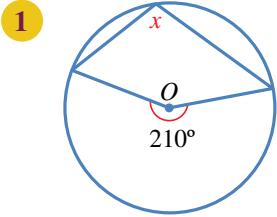
أتحقق من فهمي

في الشكل المجاور، \overleftrightarrow{AB} مماسٌ للدائرة في T .
أجد قياس كل من الزوايا: TQP ، و TPQ ، و QTP .





أجد قيمة x في كلِّ ممَّا يأتي:



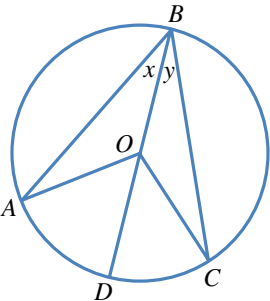
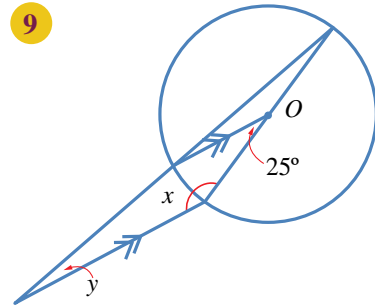
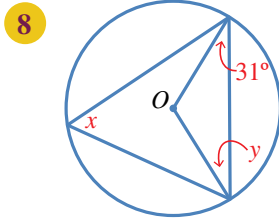
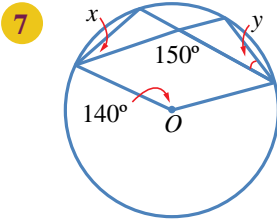
إذا كانتِ النقطة O هيَ مركزَ الدائرةِ في الشكلِ المجاورِ، فأجدُ كلاً ممَّا يأتي:

4 $m\angle EGF$.

5 $m\angle DEG$.

6 $m\angle EDF$.

إذا كانتِ النقطة O هيَ مركزَ الدائرةِ، فأجدُ قياسَ الزوايا المشارِ إليها بالحرفينِ x و y في كلِّ من الدوائرِ الآتية:



في الشكلِ المجاورِ دائرةٌ مركزُها O ، وقياسُ الزاويةِ ABO هوَ x° ،

وقياسُ الزاويةِ CBO هوَ y° :

10 أجدُ قياسَ الزاويةِ BAO .

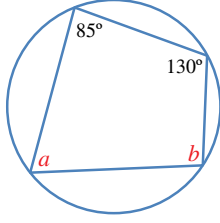
11 أجدُ قياسَ الزاويةِ AOD .

12 أثبتُ أنَّ قياسَ الزاويةِ المركزيةِ يساوي مثليَّ قياسِ

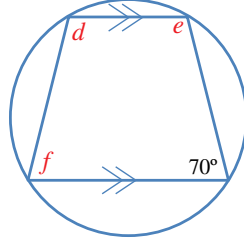
الزاويةِ المحيطيةِ المرسومةِ على القوسِ نفسهِ.

أجد قياس الزوايا المشار إليها بأحرف في كل من الدوائر الآتية:

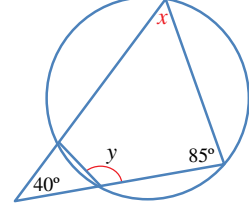
13



14



15

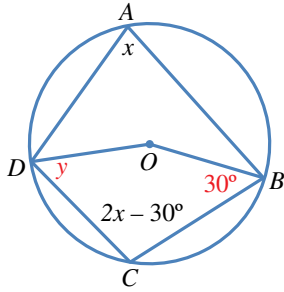


في الشكل الرباعي الدائري $PQRT$ ، قياس الزاوية ROQ هو 38° ، حيث O مركز الدائرة، و POT قُطرٌ فيها يوازي QR . أجد قياس كل من الزوايا الآتية:

16 ROT .

17 QRT .

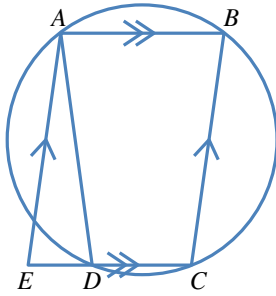
18 QPT .



يُمثل الشكل المجاور دائرة مركزها O :

19 لماذا $3x - 30^\circ = 180^\circ$ ؟

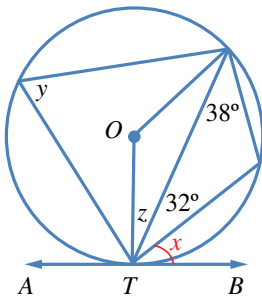
20 أجد قياس الزاوية CDO المشار إليها بالحرف y ، وأبرر كل خطوة في حلّي.



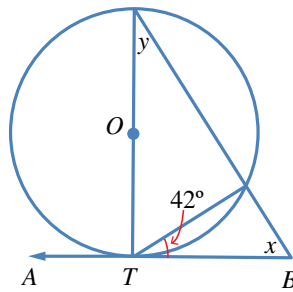
21 يُمثل الشكل المجاور $ABCE$ متوازي أضلاع. أبين أن قياس الزاوية AED يساوي قياس الزاوية ADE ، وأبرر كل خطوة في حلّي.

أجد قياس الزوايا المشار إليها بأحرف في كل من الدوائر الآتية:

22

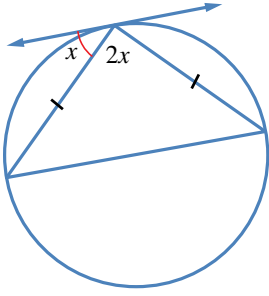


23

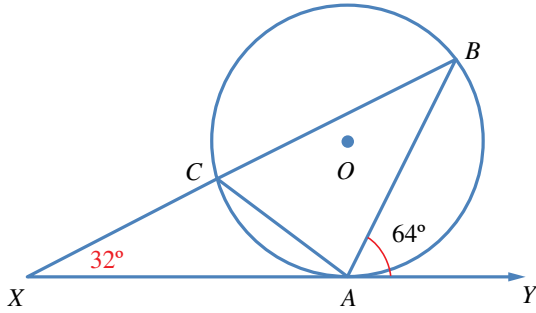
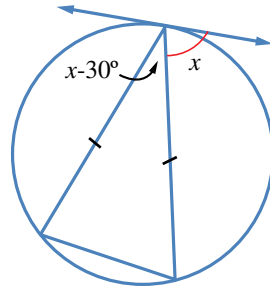


أجد قيمة x في كل من الشكلين الآتيين:

24



25

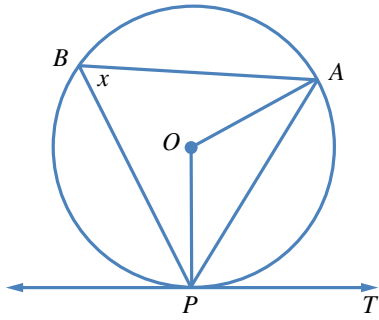


26 تُمثل النقطة O مركز الدائرة في الشكل الآتي، ويُمثل \overleftrightarrow{XY} مماسًا للدائرة عند A . إذا كانت النقاط B و C و X تُمثل خطًا على استقامة واحدة، فأثبت أن المثلث ACX مُتطابق الضلعين، وأبرر إجابتني.

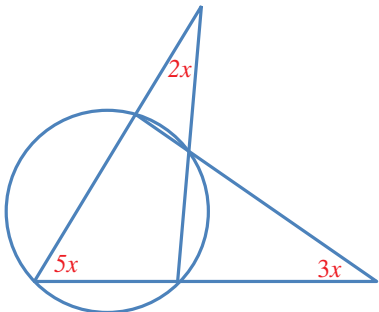
مهارات التفكير العليا



27 تبرير: قالت فاتن إن الزاوية المحيطة المرسومة على قُطر الدائرة زاوية قائمة. هل قول فاتن صحيح؟ أبرر إجابتني.



28 تبرير: في الشكل المجاور، PT مماسٌ لدائرة مركزها O . إذا كان قياس الزاوية PBA هو x° ، فأثبت أن قياس الزاوية APT يساوي قياس الزاوية ABP ، وأبرر خطوات الحل.



29 تحد: أجد قيمة x في الشكل المجاور.

معادلة الدائرة Equation of a Circle



كتابة معادلة الدائرة، وإيجاد المركز ونصف القطر من معادلة دائرة معلومة.

فكرة الدرس



معادلة الدائرة، الصورة القياسية، الصورة العامة.

المصطلحات

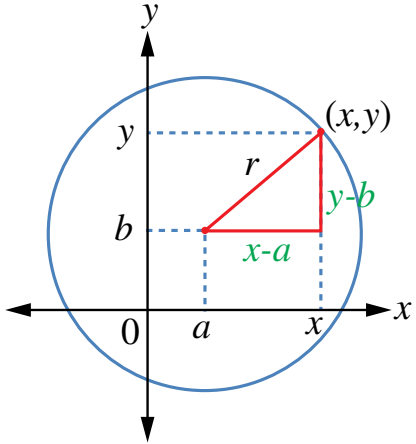


تمثل النقطة (7, 4) موقع محطة إذاعة يلتقط بثها في دائرة نصف قطرها 224 km. إذا كان فواز يقيم في بيت تمثله النقطة (95, -75) على مستوى إحداثي وحدته 1 km، فكيف يستطيع معرفة إن كان بث هذه الإذاعة يصل بيته أم لا؟

مسألة اليوم



معادلة الدائرة (equation of the circle) هي العلاقة التي تربط بين الإحداثي x والإحداثي y لكل نقطة واقعة على الدائرة. فإذا عوّض إحداثيًا نقطة في المعادلة، وكانت النتيجة عبارة صحيحة، فهذا يعني أن تلك النقطة تقع على الدائرة.



يُمثل الشكل المجاور دائرة مركزها النقطة (a, b) ، وطول نصف قطرها r . والنقطة (x, y) تقع على الدائرة. ألاحظ أنه يمكن تكوين المثلث قائم الزاوية الذي طول ضلعه الأفقي $(x - a)$ ، وطول ضلعه الرأسي $(y - b)$ ، وطول وتره r . وبتطبيق نظرية فيثاغورس تنتج المعادلة $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ التي تُسمى **الصورة القياسية (standard form)** لمعادلة الدائرة.

معادلة الدائرة

مفهوم أساسي

1 الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها النقطة (a, b) ، وطول نصف قطرها r هي: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

2 معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل $(0, 0)$ ، وطول نصف قطرها r هي: $x^2 + y^2 = r^2$

مثال 1

أكتب معادلة الدائرة في كلٍّ من الحالات الآتية:

1 المركز هو النقطة $(-2, 7)$ ، وطول نصف القطر 6 وحدات.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad \text{الصورة القياسية لمعادلة الدائرة}$$

$$(x - (-2))^2 + (y - 7)^2 = 6^2 \quad (a, b) = (-2, 7), r = 6$$

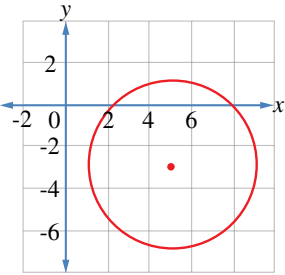
$$(x + 2)^2 + (y - 7)^2 = 36$$

2 المركز هو نقطة الأصل، وطول نصف القطر 5 وحدات.

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل}$$

$$x^2 + y^2 = 5^2 \quad \text{بتعويض } r = 5$$

$$x^2 + y^2 = 25$$



3 الدائرة المرسومة في المستوى الإحداثي المجاور.

عند النظر إلى الدائرة يتبين أن مركزها النقطة $(5, -3)$ ، وأن طول نصف قطرها 4 وحدات.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad \text{الصورة القياسية لمعادلة الدائرة}$$

$$(x - 5)^2 + (y - (-3))^2 = 4^2 \quad (a, b) = (5, -3), r = 4$$

$$(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

أتحقق من فهمي

أكتب معادلة الدائرة في الحالتين الآتيتين:

(a) المركز هو النقطة $(0, 4)$ ، وطول نصف القطر 9 وحدات.

(b) المركز هو نقطة الأصل، وطول القطر 8 وحدات.

إذا عَلِمَ مركزُ الدائرة ونقطة واقعة عليها، فإنه يُمكنُ إيجادُ طولِ نصفِ القطرِ باستعمالِ قانونِ المسافةِ بينَ نقطتينِ، ثمَّ كتابةُ معادلةِ الدائرة.

طول القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين

مراجعة المفهوم

إذا كان طول القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ ، هو d فإن:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

مثال 2

أجد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة $(-7, 13)$ ، وتمرُّ بالنقطة $(5, 4)$.

أجد طول نصف القطر باستعمال قانون المسافة بين نقطتين:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

قانون المسافة بين نقطتين

$$r^2 = (5 - (-7))^2 + (4 - 13)^2$$

بالتعويض

$$= 144 + 81$$

بالتبسيط

$$= 225$$

$$r = \sqrt{225} = 15$$

بأخذ الجذر التربيعي

والآن، أعرِّض إحداثيي المركز وقيمة r^2 في الصورة القياسية لمعادلة الدائرة، فأجد أن معادلة هذه الدائرة هي:

$$(x + 7)^2 + (y - 13)^2 = 225$$

أتحقق من فهمي 

أجد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة $(4, -3)$ ، وتمرُّ بالنقطة $(2, 0)$.

إذا علمنا معادلة دائرة بالصورة القياسية $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ، حيث $r > 0$ فإنه يُمكن فكُّ الأقواس وإعادة الترتيب، فنتج المعادلة: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$.
يُمكن أيضًا كتابة هذه المعادلة بالصورة الآتية:

$$x^2 + y^2 + 2fx + 2gy + c = 0$$

حيث: $f = -a, g = -b, c = a^2 + b^2 - r^2$ ، وهي تُسمى الصورة العامة (general form) لمعادلة الدائرة.

إذا علمنا الصورة العامة لمعادلة أي دائرة، فإنه يُمكن تحويلها إلى الصورة القياسية $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ، وذلك بإكمال المربع.

إكمال المربع

مراجعة المفهوم

لإكمال المربع للحددين $x^2 + ax$ ، يضاف $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ ، ثم يُطرح، فينتج مربع كامل هو $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2$ وبذلك يتحوّل $x^2 + ax$ إلى $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

مثال 3

أجد إحداثيات المركز، وطول نصف القطر للدائرة $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 56 = 0$.
ياكمال المربع للحدود التي تحوي x ينتج: $x^2 - 8x = (x - 4)^2 - 16$ ، وياكمال المربع للحدود التي تحوي y ينتج: $y^2 + 6y = (y + 3)^2 - 9$.
وبذلك يُمكن تحويل المعادلة $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 56 = 0$ إلى:

$$(x - 4)^2 - 16 + (y + 3)^2 - 9 - 56 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 81$$

بمقارنة هذه المعادلة بالصورة القياسية $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ، نجد أن:

$$a = 4, b = -3, r = 9$$

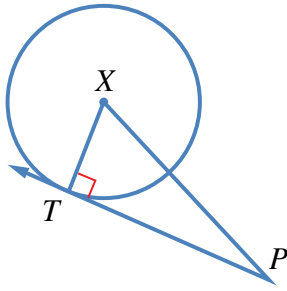
إذن، مركز هذه الدائرة هو النقطة $(4, -3)$ ، وطول نصف قطرها 9 وحدات.

أتحقق من فهمي

أجد إحداثيات المركز، وطول نصف القطر للدائرة $x^2 + y^2 + 2x - 10y - 10 = 0$.

تعلّمتُ في درسٍ سابقٍ أنّ مماسَّ الدائرة يشتركُ مع الدائرة في نقطةٍ واحدةٍ فقط، وأنّه يتعامدُ مع نصف القطرِ المارِّ بنقطة التماسّ. وهذا يفيدُ في التحقُّق من أنّ مستقيماً معطىً هو مماسٌّ لدائرةٍ معطاةٍ، وحساب طولِ قطعةٍ مماسّيةٍ كما في المثالين الآتيين.

مثال 4



أجدُ طولَ القطعةِ المماسّيةِ المرسومةِ من النقطةِ $P(6, -6)$ ، التي تمسُّ الدائرة التي معادلتها

$$(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

أرسمُ مُخطَّطاً، ولتكن النقطة X مركزَ الدائرة، و T نقطة التماسّ.

لحساب طولِ القطعةِ المماسّيةِ PT ، ثم أُطبِّقُ نظريةَ فيثاغورس على المثلث القائم XTP ، الذي يُمكنُ إيجادُ طولَي ضلعين فيه، هما: نصف القطرِ XT ، والوتر XP .

طولُ نصفِ القطرِ XT هو 5. ولحساب XP ، أجدُ المسافةَ بين مركزِ الدائرة $X(-5, 4)$ والنقطة $P(6, -6)$ باستعمالِ قانونِ المسافةِ بينَ نقطتين:

$$(XP)^2 = (6 - (-5))^2 + (-6 - 4)^2 = (11)^2 + (-10)^2 = 221$$

وبتطبيقِ نظريةِ فيثاغورس على المثلثِ XTP :

$$(PT)^2 = (XP)^2 - (XT)^2 \quad \text{نظريةُ فيثاغورس}$$

$$= 221 - 25 \quad \text{بالتعويض}$$

$$= 196 \quad \text{بالتبسيط}$$

$$PT = \sqrt{196} = 14 \quad \text{بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفينِ}$$

إذن، طولُ القطعةِ المماسّيةِ 14 وحدةً.

أتحقق من فهمي 

أجدُ طولَ القطعةِ المماسّيةِ المرسومةِ من النقطةِ $P(7, 4)$ ، التي تمسُّ الدائرة التي معادلتها

$$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 81$$

مثال 5

أثبت أن المستقيم $y = 2x + 3$ هو مماسٌ للدائرة التي معادلتها $(x - 10)^2 + (y - 8)^2 = 45$
 أحل النظام المكوّن من المعادلتين: $y = 2x + 3$ ، و $(x - 10)^2 + (y - 8)^2 = 45$ ؛ لإيجاد عدد
 نقاط تقاطع المستقيم والدائرة. فإذا كان عدد نقاط التقاطع واحدًا فقط، فإنّ المستقيم يكون
 مماسًا للدائرة.

بتعويض $y = 2x + 3$ في معادلة الدائرة $(x - 10)^2 + (2x + 3 - 8)^2 = 45$

بالتبسيط $(x - 10)^2 + (2x - 5)^2 = 45$

بفك الأقواس $x^2 - 20x + 100 + 4x^2 - 20x + 25 = 45$

بجمع الحدود المتشابهة، $5x^2 - 40x + 80 = 0$

وجعل الطرف الأيمن صفرًا

بقسمة الطرفين على 5 $x^2 - 8x + 16 = 0$

بالتحليل $(x - 4)^2 = 0$

$x = 4$

بتعويض قيمة x في إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة y $y = 2(4) + 3 = 11$

بما أن هذا المستقيم يقطع الدائرة في نقطة واحدة فقط هي $(4, 11)$ ، فإنّه مماسٌ للدائرة.

أتحقق من فهمي 

أثبت أن المستقيم $y = 4x - 5$ هو مماسٌ للدائرة التي معادلتها $(x + 5)^2 + (y - 9)^2 = 68$

أتدرب وأحل المسائل 

أكتب معادلة الدائرة في كلٍّ من الحالات الآتية:

1 المركز هو نقطة الأصل، وطول نصف قطرها 7 وحدات.

2 المركز هو النقطة $(-1, 3)$ ، وطول نصف قطرها 5 وحدات.

3 المركز هو النقطة $(-3, -2)$ ، وطول قطرها 10 وحدات.

أجدُ معادلةَ الدائرة المُعطى مركزُها وإحداثيَا نقطةٍ تمرُّ بها في كلِّ ممَّا يأتي:

4 المركز $(-1, 2)$ ، وتمرُّ بالنقطة $(3, 5)$.

5 المركز نقطة الأصل، وتمرُّ بالنقطة $(-9, -4)$.

أجدُ إحداثيَّي المركز، وطولَ نصفِ القطرِ لكلِّ مِنَ الدوائرِ الآتية:

6 $(x + 5)^2 + (y - 8)^2 = 36$

7 $(x - 19)^2 + (y - 33)^2 = 400$

8 $x^2 + (y + 4)^2 = 45$

9 $(x - 3)^2 + (y + 10)^2 = 28$

أجدُ إحداثيَّي المركز، وطولَ نصفِ القطرِ لكلِّ مِنَ الدوائرِ الآتية:

10 $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0$

11 $x^2 + y^2 + 8x = 9$

12 $2x^2 + 2y^2 + 20x + 36y + 158 = 0$

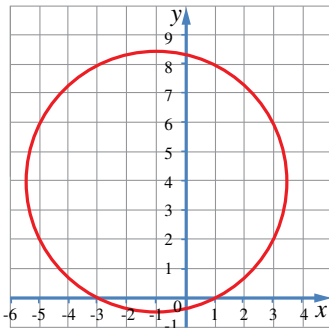
13 $x^2 + y^2 - 18x + 14y = 14$

أكتبُ معادلةَ الدائرة بالصورتين: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ، $x^2 + y^2 + 2fx + 2gy + c = 0$ ، حيثُ: f ، g ، و c أعدادٌ صحيحةٌ في الحالاتِ الآتية:

14 المركز $(-11, -1)$ ، وطولُ القطرِ 26 وحدةً.

15 المركز $(3, 0)$ ، وطولُ نصفِ القطرِ $4\sqrt{3}$ وحداتٍ.

16 المركز $(-4, 7)$ ، وتمرُّ بالنقطة $(1, 3)$.



17 أجدُ معادلةَ الدائرة المُبيَّنة في الرسمِ البيانيِّ المجاور.

18 أحلُّ المسألةَ الواردةً في بدايةِ الدرسِ.

- 19 أجد إحداثيي المركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها: $(2x-4)^2 + (2y+6)^2 = 100$.
- 20 دائرة معادلتها $x^2 + y^2 + px + 6y = 96$ ، وطول نصف قطرها 11 وحدة، و p عددٌ ثابتٌ موجبٌ. أجد بُعد مركز الدائرة عن نقطة الأصل.
- تُمثل النقطتان $D(2, 9)$ و $E(14, -7)$ نهايتي قطر لدائرة مركزها C :
- 21 أجد إحداثيي المركز C .
- 22 أجد طول نصف القطر.
- 23 أكتب معادلة الدائرة.
- 24 أثبت أن المستقيم $y = 3x - 2$ هو مماسٌ للدائرة التي معادلتها: $x^2 + y^2 + 4x - 24y + 108 = 0$.
- 25 رُسم مماسٌ من النقطة $P(8, 5)$ للدائرة التي معادلتها: $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 75 = 0$. أجد طول القطعة المستقيمة التي تصل النقطة P بنقطة التماس.

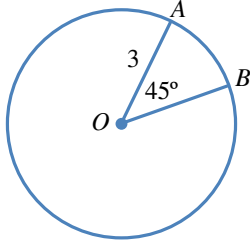
مهارات التفكير العليا



- 26 **تبرير:** قال عبد الرحمن إن $x^2 + y^2 - 14x + 6y + 59 = 0$ ليست معادلة دائرة. هل قول عبد الرحمن صحيح؟ أبرر إجابتي.
- 27 **تحذ:** ممر دائري محصور بين دائرتين لهما المركز نفسه، وهو النقطة $(7, 3)$. إذا كانت الدائرة الكبرى تمس المحور y ، والصغرى تمس المحور x ، فأكتب معادلتَي الدائرتين اللتين تُشكّلان المحيط الخارجي والمحيط الداخلي للممر، ثم أجد مساحة الممر بالوحدات المربّعة.
- 28 **تحذ:** رُسم من النقطة $A(8, 21)$ مماسان للدائرة التي مركزها C ، فمساها عند النقطتين D و B . إذا كانت معادلة الدائرة هي $(x-9)^2 + (y+4)^2 = 49$ ، فما مساحة الشكل الرباعي $ABCD$ ؟
- 29 **تحذ:** أكتب الصورة القياسية لمعادلة الدائرة $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 24 = 0$ من دون استعمال طريقة إكمال المربع.

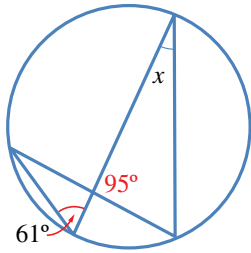
اختبار نهاية الوحدة

- 4 طول القوس الأصغر \widehat{AB} بدلالة π في الشكل الآتي هو:



- a) $\frac{9\pi}{8}$ b) $\frac{3\pi}{2}$
c) $\frac{9\pi}{2}$ d) $\frac{3\pi}{4}$

- 5 قيمة x في الشكل الآتي هي:



- a) 61° b) 24°
c) 34° d) 95°

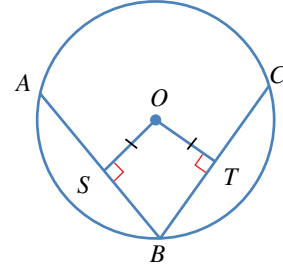
- 6 النقطة التي لا تقع على الدائرة التي معادلتها $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 25$ هي:

- a) $(-2, -1)$ b) $(1, 8)$
c) $(3, 4)$ d) $(0, 5)$

- 7 أكتب معادلة الدائرة التي تمثل النقطتين $A(4, -3)$ و $B(6, 9)$ طرفاً قطرياً فيها.

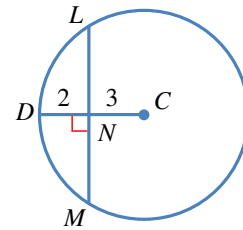
أختار رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

- 1 \overline{AB} و \overline{CB} في الشكل الآتي وتران في دائرة مركزها O . إذا كان $AS = 4$ cm و $OT = 3$ cm، فإن طول \overline{BC} بالسنتيمترات هو:



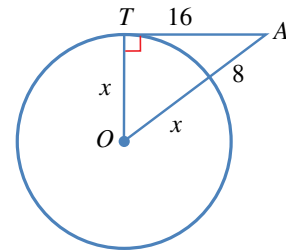
- a) 6 b) 7
c) 8 d) 10

- 2 اعتماداً على الشكل الآتي، فإن طول \overline{LM} هو:



- a) 5 b) 8
c) 10 d) 13

- 3 اعتماداً على الشكل الآتي، فإن طول نصف قطر الدائرة هو:



- a) 5.75 b) 12
c) 4 d) 8

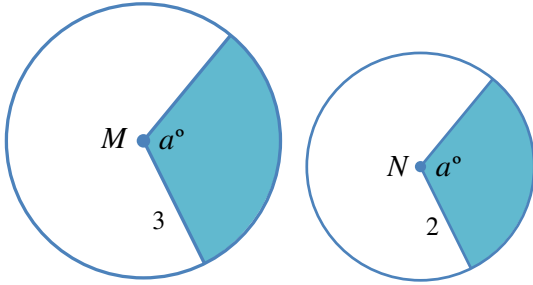
أجد إحداثيي المركز، وطول نصف القطر لكل من الدائرتين الآتيتين:

13 $(x - 5)^2 + y^2 = 20$

14 $x^2 + y^2 + 18x - 8y - 24 = 0$

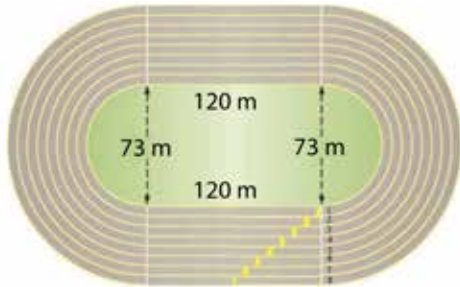
تدريب على الاختبارات الدولية

15 النقطتان M و N هما مركزا الدائرتين في الشكل الآتي. إذا كانت مساحة المنطقة المظللة في الدائرة الكبرى 9 وحدات مربعة، فما مساحة المنطقة المظللة في الدائرة الصغرى بالوحدات المربعة؟



- a) 3 b) 4
c) 5 d) 7

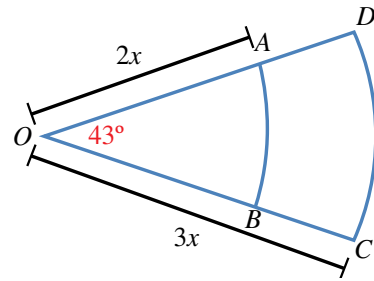
16 يُمثل الشكل الآتي مضمارًا للجري من ثمانية مسارب، كلٌّ منها يتكوّن من جزأين مستقيمين متوازيين، ونصفي دائرتين متصلتين بهما. إذا كان عرض كل مسرب 1 m، فبكم يزيد طول الحد الداخلي من المسرب الثالث على طول الحد الداخلي من المسرب الأول؟



يُمثل الشكل التالي قطاعين دائريين من دائرتين لهما المركز نفسه O . إذا كان نصف قطر الدائرة الصغرى $2x$ ، ونصف قطر الدائرة الكبرى $3x$ ، وقياس الزاوية AOB هو 43° ، ومساحة المنطقة $ABCD$ هي 30 cm^2 ، فأجد:

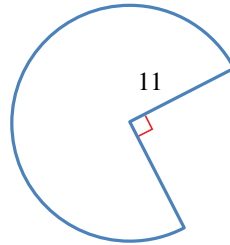
8 قيمة x .

9 الفرق بين طولَي القوسين CD و AB .

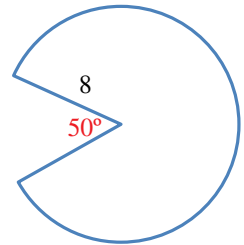


أجد المساحة والمحيط لكل من القطاعين الآتيين:

10

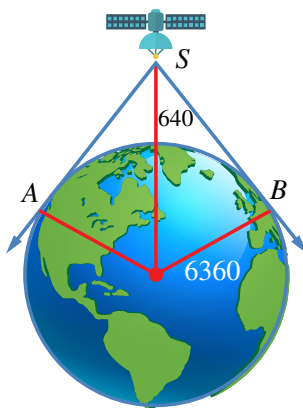


11



12 أقمار صناعية: يرتفع قمر صناعي مسافة 640 km

عن سطح الأرض التي نصف قطرها 6360 km، ويمكن منه مشاهدة المنطقة الواقعة بين المماسين SA



و SA من سطح الأرض. ما المسافة بين القمر الصناعي وأبعد نقطة يمكن مشاهدتها منه على سطح الأرض؟

حساب المثلثات

Trigonometry

ما أهمية هذه الوحدة؟

تُعَدُّ دراسة العلاقات بين أطوال أضلاع المثلث وقياسات زواياه (أو ما يُسمَّى علم المثلثات) أحد أهم فروع الرياضيات وأقدمها؛ إذ ساعد هذا العلم قدماء المصريين على بناء الأهرامات ودراسة الفلك، وقد استمرَّ الاهتمام به حتى اليوم؛ فكان أساسًا لكثير من العلوم الأخرى.

سأتعلَّم في هذه الوحدة:

- ◀ ماهية دائرة الوحدة، ووضع الزاوية القياسي.
- ◀ إيجاد النسب المثلثية للزوايا ضمن الدورة الواحدة.
- ◀ تمثيل الاقترانات المثلثية في المستوى الإحداثي، واستنتاج خصائصها.
- ◀ حل معادلات مثلثية، بحيث تكون مجموعة الحل ضمن الدورة الواحدة.

تعلمت سابقًا:

- ✓ مفهوم جيب الزاوية الحادة، وجيب تمامها، وظلها بوصفها نسبتًا بين أضلاع المثلث قائم الزاوية.
- ✓ استخدام العلاقة $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ في حل مسألة عن مثلث قائم الزاوية.
- ✓ حل معادلات خطية وتربيعية ضمن مجموعة الأعداد الحقيقية.

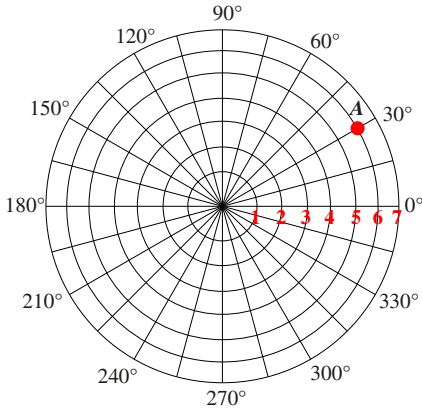
إنشاء نظام إحداثي جديد، يعتمد البعد عن نقطة مرجعية، وقياس زاوية الميل على الخط الأفقي.

فكرة المشروع



أوراق، مسطرة، منقلة، فرجار، آلة حاسبة.

المواد والأدوات



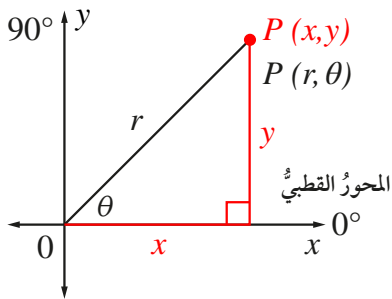
نظام الإحداثيات القطبية: يمكن تحديد موقع أي نقطة في المستوى باستخدام الزوج المرتب (r, θ) ، حيث:

r : بُعد النقطة عن نقطة مرجعية تُسمى القطب.

θ : الزاوية بين الشعاع المارّ بالنقطة والقطب، والمحور القطبي، وهو الشعاع الأفقي من القطب باتجاه اليمين. يُلاحظ من الشكل المجاور أن إحداثي النقطة A هما: $(6, 30^\circ)$. تُسمى هذه الطريقة نظام الإحداثيات القطبية.

تحويل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية: لتحويل الإحداثيات القطبية

إلى إحداثيات ديكارتية، أرسم عمودًا من النقطة التي يُراد تحويل إحداثياتها إلى المحور الأفقي، ثم أستعمل النسب المثلثية لحساب طولَي ضلعي المثلث الناتج، كما في الشكل المجاور، للحصول على الإحداثيين x و y لتلك النقطة. للتحويل من النظام الديكارتي إلى النظام القطبي، أجد قيمة كل من r و θ بطريقة عكسية، وذلك باستخدام النسب المثلثية.



خطوات تنفيذ المشروع:

1 أستعمل مسطرة وفرجارًا لرسم نسخة مكبرة للمستوى القطبي أعلاه، مُحدّدًا عليه مواقع 6 نقاط تمثل رؤوس سداسي منتظم، ثم أجد إحداثياتها القطبية (r, θ) ، والديكارتية (x, y) .

2 أصِل بين النقاط الستة بلونٍ مختلف، ثم أستعمل قانون المسافة بين نقطتين لإيجاد محيط الشكل السداسي.

عرض النتائج:

أصمّم مع أفراد مجموعتي مجلة أو لوحة تتضمن ما يأتي:

- خطوات تنفيذ المشروع موضحة بالصور والرسوم.
- وصف لتطبيق حياتي تُستعمل فيه الإحداثيات القطبية.

النسب المثلثية Trigonometric Ratios

تعرفُ الوضع القياسيُّ للزاوية، وربطُ النسبِ المثلثيةِ بدائرةِ الوحدةِ، وإيجادُها للزوايا الربعية، وإيجادُ النسبتينِ المثلثتينِ الأساسيتينِ الباقيتينِ في حالِ معرفةِ إحدى النسبِ المثلثيةِ الأساسيةِ للزاوية.

فكرةُ الدرس



ضلعُ الابتداءِ، ضلعُ الانتهاءِ، الوضعُ القياسيُّ، دائرةُ الوحدةِ، الزاويةُ الربعيةُ.

المصطلحات



تعلمتُ سابقاً إيجادَ النسبِ المثلثيةِ لزاويا حادّة، مثل النسبِ بينَ أطوالِ أضلاعِ المثلثِ قائمِ الزاوية. ولكن، كيف يُمكنُ إيجادُ النسبِ المثلثيةِ لزاويةٍ أكبرَ من 90° ، مثلِ الزاويةِ بينَ شفراتِ مروحةِ توليدِ الطاقةِ الكهربائيّة؟

مسألة اليوم



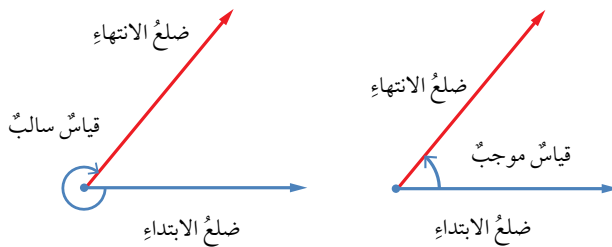
الزاويةُ هي اتحادُ شعاعينِ لهما نقطةُ البدايةِ نفسُها. والنقطةُ المشتركةُ تُعرفُ برأسِ الزاوية، أمّا الشعاعانِ فيُسمّى أحدهما **ضلعُ الابتداءِ** (initial side)، والآخرُ **ضلعُ الانتهاءِ** (terminal side). يوجدُ قياسانِ لأيِّ زاويةٍ؛ أحدهما موجبٌ عندما يدورُ ضلعُ الانتهاءِ عكسَ اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعة، والآخرُ سالبٌ حينَ يدورُ ضلعُ الانتهاءِ معَ اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعة.

إرشادٌ

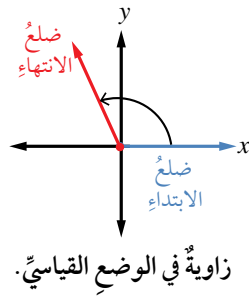
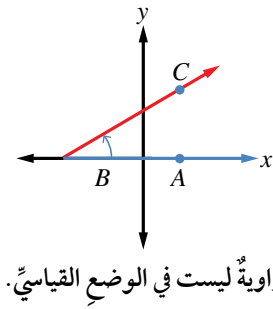
اتّجاهُ حركةِ عقاربِ الساعة.



عكسُ حركةِ عقاربِ الساعة.



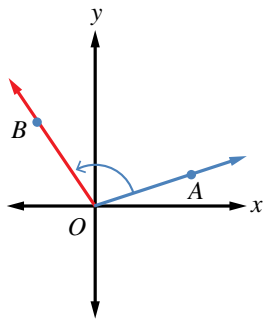
تكونُ الزاويةُ المرسومةُ في المستوى الإحداثيِّ في **الوضعِ القياسيِّ** (standard position) إذا كانَ رأسُها عندَ نقطةِ الأصلِ $(0, 0)$ ، وضلعُ ابتدائها منطبقاً على محورِ x الموجبِ.



مثال 1

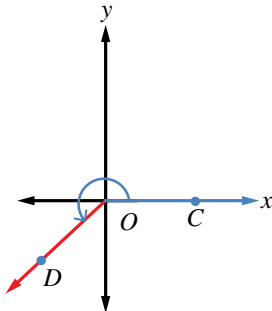
أحدّد إذا كانت الزاويتان الآتيتان في وضعٍ قياسيٍّ أم لا، وأبينُ السببَ:

1



الزاوية AOB ليست في وضعٍ قياسيٍّ؛ لأنّ ضلعَ ابتدائها لا ينطبقُ على محورِ x الموجب.

2

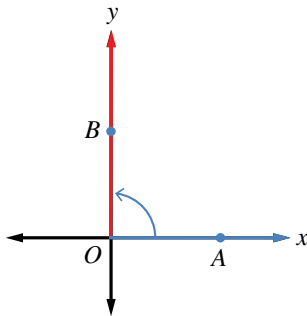


الزاوية COD في وضعٍ قياسيٍّ؛ لأنّ ضلعَ ابتدائها ينطبقُ على محورِ x الموجب، ورأسها على نقطة الأصل O .

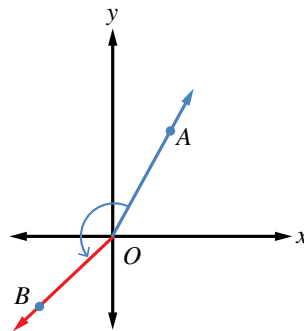
أتحقق من فهمي

أحدّد إذا كانت الزاويتان الآتيتان في وضعٍ قياسيٍّ أم لا، وأبينُ السببَ:

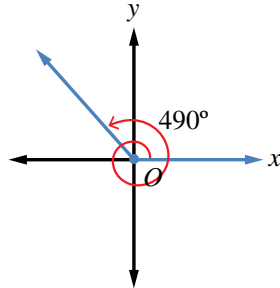
1



2



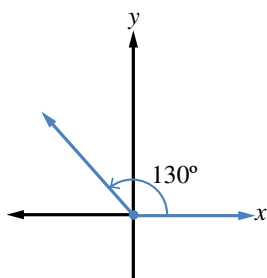
إذا دارَ ضلعُ انتهاءٍ زاويةٍ في الوضع القياسيِّ دورةً كاملةً عكسَ اتجاهِ حركةِ عقاربِ الساعةِ، فَإِنَّهُ يصنَعُ زوايا قياساتها بين 0° و 360° . وإذا استمرَّ في دورانه، فَإِنَّهُ يصنَعُ زوايا قياساتها أكبرُ من 360° .



مثال 2

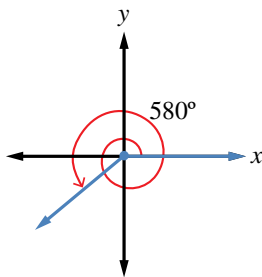
أرسمُ في الوضع القياسيِّ الزاويةَ المعطى قياسها في ما يأتي، مُحدِّدًا مكانها:

1 130°



أرسمُ المحورين الإحداثيين، ومن نقطة الأصلِ أرسمُ ضلعَ الابتداءِ مُنطبقًا على محور x الموجب، ثم أضعُ مركزَ المنقلة على نقطة الأصلِ، وتدرجَ المنقلة 0° على ضلعِ الابتداءِ، ثمَّ أعيِّنُ نقطةَ مقابلِ التدرجِ 130° . بعد ذلك أرسمُ ضلعَ الانتهاءِ من نقطة الأصلِ إلى النقطة التي عيَّنتها، فأجدُ أنَّ ضلعَ انتهاءِ الزاوية يقعُ في الربعِ الثاني.

2 580°



بما أنَّ $580^\circ = 360^\circ + 220^\circ$ ، فإنَّ ضلعَ انتهاءِ الزاوية 580° هو نفسه ضلعُ انتهاءِ الزاوية 220° الذي يقعُ في الربعِ الثالثِ.

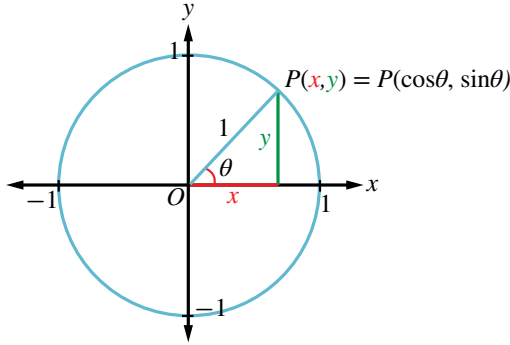
أتتحقق من فهمي 

أرسمُ زاويةً قياسها 460° في الوضع القياسيِّ، مُحدِّدًا مكانها.

إرشادٌ

المنقلة ذاتُ شكلِ نصفِ الدائرة لها تدرجان متعاكسان، يبدأ كلُّ منهما من 0° ، وينتهي عند 180° ؛ لذا يجبُ دائمًا وضعُ التدرجِ على ضلعِ ابتداءِ الزاوية عند قياسها، أو رسمها.

دائرة الوحدة (unit circle) هي دائرة مركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها وحدة واحدة. إذا رسمت الزاوية θ في الوضع القياسي، فإن ضلع انتهائها يقطع دائرة الوحدة في نقطة وحيدة هي $P(x, y)$. ومع تغيير قياس الزاوية يتغير موقع النقطة P على الدائرة، ويتغير إحداثياتها.



يمكن تعريف النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ بدلالة إحداثيات P كما يأتي:

$$\sin \theta = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos \theta = \frac{x}{1} = x$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}, x \neq 0$$

مثال 3

أجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي، التي يقطع ضلع انتهائها دائرة الوحدة في النقطة الواردة في ما يأتي:

1 $P(-0.6, 0.8)$

$$\sin \theta = y = 0.8, \quad \cos \theta = x = -0.6, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{0.8}{-0.6} = -\frac{4}{3}$$

2 $P\left(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$

$$\sin \theta = y = -\frac{12}{13}, \quad \cos \theta = x = \frac{5}{13}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-12/13}{5/13} = -\frac{12}{5}$$

أتحقق من فهمي

أجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي، التي يقطع ضلع انتهائها دائرة الوحدة عند النقطة $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

لغة الرياضيات

الحرف اليوناني θ يُقرأ: ثيتا، وهو يُستعمل للدلالة على قياس الزاوية.

رموز رياضية

يدلُّ الرمز $\sin \theta$ على نسبة جيب الزاوية θ ، والرمز $\cos \theta$ على نسبة جيب التمام، والرمز $\tan \theta$ على نسبة ظل الزاوية θ .

إرشاد

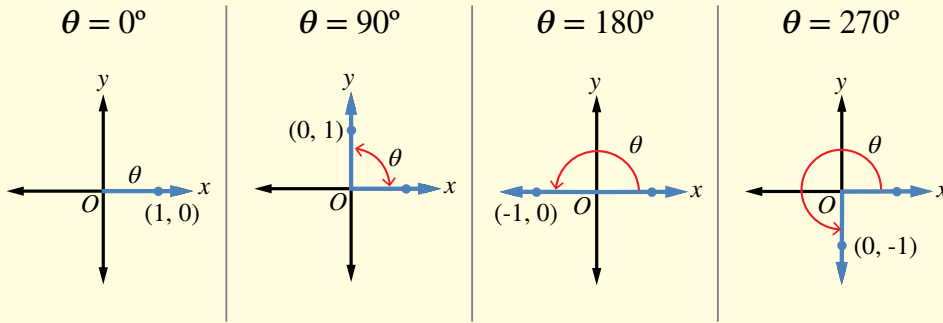
النسب المثلثية الأساسية للزاوية θ هي: $\sin \theta$ ، و $\cos \theta$ ، و $\tan \theta$.

عند رسم الزاوية θ في الوضع القياسي، قد يقع ضلعُ انتهائِها في أحد الأرباع الأربعة، فيقال عندئذٍ إنَّ الزاوية θ واقعةٌ في الربع كذا، وقد ينطبقُ ضلعُ انتهائِها على أحد المحورين الإحداثيين، فتُسمَّى الزاوية θ في هذه الحالة **زاويةً ربعيةً** (quadrantal angle).

الزوايا الربعية

مفهوم أساسي

الزوايا الربعية في دائرة الوحدة:



يُمكنُ تحديدُ النسبِ المثلثية للزوايا الربعية من إحداثيات نقاط تقاطع دائرة الوحدة مع المحورين الإحداثيين. فمثلاً، يتقاطع ضلعُ انتهاء الزاوية 90° في الوضع القياسي مع دائرة الوحدة في النقطة $P(0, 1)$. وبذلك، فإن: $\sin 90^\circ = 1$ ، $\cos 90^\circ = 0$ ، ويكون $\tan 90^\circ$ غير مُعرَّفٍ لأنَّه لا تجوزُ القسمة على صفرٍ.

مثال 4

أين يقطع ضلعُ انتهاء الزاوية التي قياسها 180° دائرة الوحدة إذا رُسِّمَتْ في الوضع القياسي؟ أجد النسب المثلثية الأساسية لها.

يقطع ضلعُ انتهاء الزاوية التي قياسها 180° دائرة الوحدة في النقطة $C(-1, 0)$ ، إذن:

$$\sin 180^\circ = y = 0, \quad \cos 180^\circ = x = -1, \quad \tan 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0$$

أتحقق من فهمي

أجد النسب المثلثية الأساسية للزاويتين اللتين قياس كلُّ منهما 270° ، و 360° على الترتيب.

إذا كانت θ زاويةً حادةً، فإنَّه يُمكنُ رسمُ مثلثٍ قائمٍ الزاوية تكون θ إحدى زواياهُ.

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

نظرية فيثاغورس

$$\frac{(BC)^2}{(AC)^2} + \frac{(AB)^2}{(AC)^2} = \frac{(AC)^2}{(AC)^2}$$

بقسمة الطرفين على $(AC)^2$

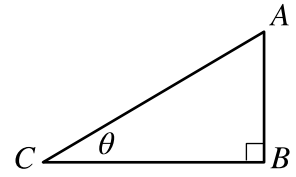
$$\left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = 1$$

بتطبيق قوانين الأسس

$$(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1$$

بالتعويض

تظلُّ هذه النتيجةً صحيحةً بقطع النظر عن قياس الزاوية θ ، وهي تُستعمل لإيجاد إحدى هاتين النسبتين إذا عُلِمَت الأخرى ولكن يجبُ مراعاةُ إشارات النسب المثلثية؛ فهي تختلفُ بحسبِ الربع الذي يقعُ فيه ضلعُ انتهاء الزاوية في الوضع القياسي كما هو موضحُ في الشكل المجاور.



الربع الثاني	↑	الربع الأول
$\sin \theta \oplus$		$\sin \theta \oplus$
$\cos \theta \ominus$		$\cos \theta \oplus$
$\tan \theta \ominus$		$\tan \theta \oplus$
$\sin \theta \ominus$	←	$\sin \theta \ominus$
$\cos \theta \ominus$		$\cos \theta \oplus$
$\tan \theta \oplus$		$\tan \theta \ominus$
الربع الثالث	↓	الربع الرابع

مثال 5

أجد قيمة النسبتين الأساسيتين الباقيتين إذا كان:

$$\textcircled{1} \sin \theta = -\frac{1}{5}, \text{ ووقع ضلعُ انتهاء } \theta \text{ في الوضع القياسي في الربع الثالث.}$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

نتيجةً لنظرية فيثاغورس

$$\cos^2 \theta + \left(\frac{-1}{5}\right)^2 = 1$$

بتعويض قيمة $\sin \theta$

$$\cos^2 \theta = 1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$$

ب طرح $\frac{1}{25}$ من الطرفين

$$\cos \theta = \pm \frac{\sqrt{24}}{5}$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{24}}{5}$$

في الربع الثالث يكون $\cos \theta$ سالبًا

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-1/5}{-\sqrt{24}/5} = \frac{1}{\sqrt{24}}$$

2 $\tan \theta = -3.5$ ، ووقع ضلعُ انتهاءِ θ في الوضع القياسيِّ في الربع الثاني.

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -3.5$$

$$\sin \theta = -3.5 \cos \theta$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta + (-3.5 \cos \theta)^2 = 1$$

$$\cos^2 \theta + 12.25 \cos^2 \theta = 1$$

$$13.25 \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{13.25}$$

$$\cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1}{13.25}} \approx \pm 0.2747$$

$$\cos \theta = -0.2747$$

$$\sin \theta = -3.5 \times -0.2747$$

$$= 0.96145 \approx 0.96$$

بالتعويض

بضرب الطرفين في $\cos \theta$

نتيجةً لنظرية فيثاغورس

بتعويض قيمة $\sin \theta$

بالتربيع

بالتبسيط

بقسمة الطرفين على 13.25

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين،

واستعمال الآلة الحاسبة

في الربع الثاني يكون $\cos \theta$ سالبًا

بتعويض قيمة $\cos \theta$

أتحقق من فهمي 

أجد قيمة كلٍّ من $\sin \theta$ و $\tan \theta$ إذا كان $\cos \theta = 0.8$ ، ووقع ضلعُ انتهاءِ θ في الوضع القياسيِّ في الربع الرابع.



برع عالمُ الفلكِ والرياضياتِ المُسلمُ محمدُ بنُ جابرِ البتائيُّ في علمِ المثلثاتِ، واكتشفَ العديدَ منَ العلاقاتِ المُهمَّةِ بينَ النسبِ المثلثيةِ، مثلَ:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

أتدرب وأحل المسائل 

أرسمُ الزوايا الآتية في الوضع القياسيِّ:

1 225°

2 160°

3 330°

4 240°

أحدُّ الربعِ الذي يقع فيه ضلعُ انتهاءِ كلِّ زاويةٍ ممَّا يأتي إذا رُسِّمَتْ في الوضع القياسيِّ:

5 285°

6 75°

7 100°

8 265°

أحدُّ الربع (أو الأرباع) الذي يقع فيه ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيِّ إذا كانَ:

- 9 $\sin \theta > 0$ 10 $\cos \theta > 0$ 11 $\tan \theta < 0$ 12 $\sin \theta < 0$ و $\cos \theta < 0$

أحدُّ الربع (أو الأرباع) الذي يقع فيه ضلعُ انتهاءِ الزاويةِ θ في الوضعِ القياسيِّ إذا كانَ:

- 13 $\sin \theta = -0.7$ 14 $\tan \theta = 2$ 15 $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ 16 $\tan \theta = -1$

- 17 $\cos \theta = 0.45$ 18 $\sin \theta = 0.55$ 19 $\sin \theta = 0.3, \cos \theta < 0$ 20 $\tan \theta = -4, \sin \theta > 0$

أحدُّ النسبِ المثلثيةِ الأساسيةِ للزاويةِ θ إذا قطعَ ضلعُ انتهائِها في الوضعِ القياسيِّ دائرةَ الوحدةِ في النقاطِ الآتيةِ:

- 21 $P(0, -1)$ 22 $P(0.5, 0.5\sqrt{3})$ 23 $P\left(\frac{-8}{17}, \frac{15}{17}\right)$ 24 $P\left(\frac{20}{29}, \frac{-21}{29}\right)$

أحدُّ النسبتينِ المثلثتينِ الأساسيتينِ الباقيتينِ في الحالاتِ الآتيةِ:

- 25 $\sin \theta = \frac{3}{4}, 90^\circ < \theta < 180^\circ$ 26 $\tan \theta = 0.78, -1 < \sin \theta < 0$

- 27 $\cos \theta = -0.75, \tan \theta < 0$ 28 $\sin \theta = -0.87, 270^\circ < \theta < 360^\circ$

مهارات التفكير العليا



29 تبريرٌ: ما أكبرُ قيمةٍ لجيبِ الزاويةِ؟ ما أصغرُ قيمةٍ له؟ أبرّرْ إجابتي.

30 أكتشفُ الخطأ: حلّ كلُّ من أمجدَ وزينةِ المسألةَ الآتيةَ. إذا كانَ $\tan x = 0.75$ ، وكانت x بينَ 180° و 360° ، فما قيمةُ $\sin x + \cos x$ ؟

زينةُ:

$$\sin x + \cos x = -1.4$$

أمجدُ:

$$\sin x + \cos x = 0.2$$

أحدُّ أيُّهما كانتَ إجابتُهُ صحيحةً، وأبرّرْ إجابتي.

النسب المثلثية للزوايا ضمن الدورة الواحدة Trigonometric Ratios for Angles between 0° and 360°

إيجاد النسب المثلثية الأساسية لأي زاوية بين 0° و 360° ، وإيجاد الزاوية إذا عرفت إحدى نسبها المثلثية.

فكرة الدرس

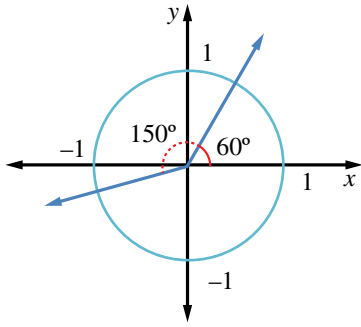


الزاوية المرجعية، معكوس النسبة المثلثية.

المصطلحات



مسألة اليوم



دار ضلع انتهاء زاوية قياسها 60° في الوضع القياسي
بزاوية 150° عكس اتجاه حركة عقارب الساعة. كيف نجد
إحداثيي نقطة تقاطع ضلع الانتهاء مع دائرة الوحدة في
موقعه الجديد؟

تعرفنا في الدرس السابق كيفية إيجاد النسب المثلثية لزاوية مرسومة في الوضع القياسي
باستعمال إحداثيي نقطة تقاطع ضلع انتهائها مع دائرة الوحدة، وستعرف في هذا الدرس كيف
نجد النسب المثلثية إذا علم قياس الزاوية بالدرجات.

إذا وقع ضلع انتهاء الزاوية θ في الربع الأول (أي كانت $0^\circ < \theta < 90^\circ$)، فإنه يمكن إيجاد
النسب المثلثية لهذه الزاوية باستعمال الآلة الحاسبة، أو بما نحفظه من نسب مثلثية للزوايا
الخاصة: ($30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$).

النسب المثلثية للزوايا الخاصة

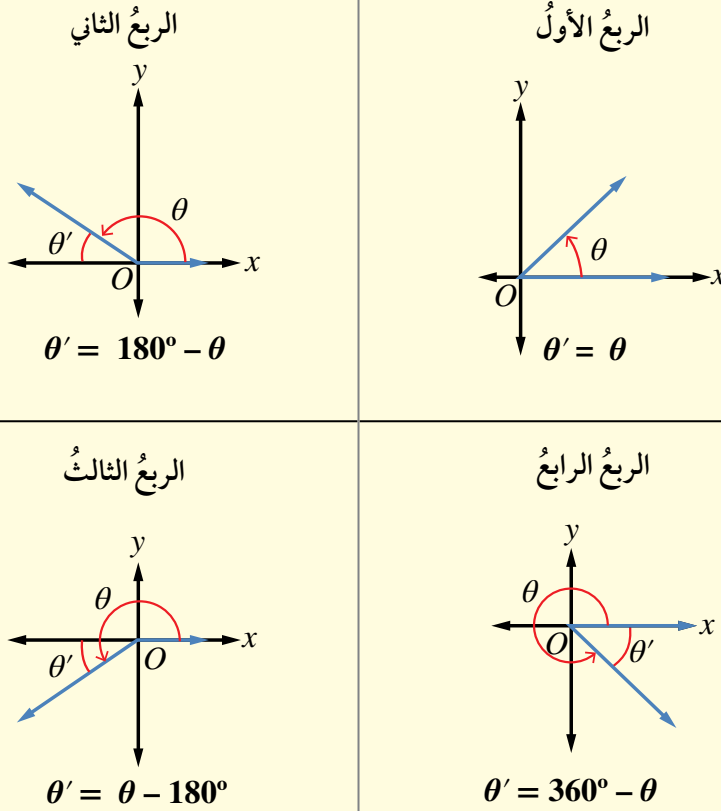
مراجعة المفاهيم

θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف

أما إذا وقع ضلعُ انتهاءِ الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي في أيِّ من الأرباع الثلاثة الأخرى، فإنَّ نسبها المثلثية تكونُ مُرتبطةً بالنسبِ المثلثية للزاوية المرجعية θ' (reference angle)، وهي الزاوية الحادة المحصورة بين ضلعِ انتهاءِ الزاوية θ والمحورِ x .

الزاوية المرجعية

مفهوم أساسي



النسبُ المثلثية للزاوية θ تساوي النسبِ المثلثية لزاويتها المرجعية θ' مع اختلاف الإشارة أحياناً بحسبِ الربع الذي يقع فيه ضلعُ انتهاءِ الزاوية θ .

لإيجاد النسبِ المثلثية لأيِّ زاوية θ ، فإننا نتبع الخطوات الثلاث الآتية:

الخطوة 1: إيجاد الزاوية المرجعية θ' .

الخطوة 2: إيجاد النسبة المثلثية للزاوية المرجعية θ' .

الخطوة 3: تحديد إشارة النسبة المثلثية للزاوية θ بحسبِ الربع الذي يقع فيه ضلعُ انتهاءها.

أتذكر

الربيع الثاني	↑	الربيع الأول
$\sin \theta \oplus$		$\sin \theta \oplus$
$\cos \theta \ominus$		$\cos \theta \oplus$
$\tan \theta \ominus$		$\tan \theta \oplus$
$\sin \theta \ominus$	↓	الربيع الثالث
$\cos \theta \ominus$		$\sin \theta \ominus$
$\tan \theta \oplus$		$\cos \theta \oplus$
		$\tan \theta \ominus$

مثال 1

أجد قيمة كلِّ ممَّا يأتي:

1 $\sin 150^\circ$

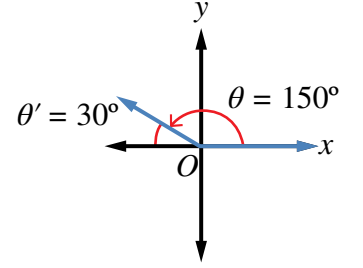
يقع ضلعُ الانتهاء للزاوية 150° في الربع الثاني؛ لذا أستخدمُ زاويتها المرجعية:

$$\theta' = 180^\circ - \theta \quad \text{إيجادُ قياسِ الزاوية المرجعية}$$

$$= 180^\circ - 150^\circ \quad \theta = 150^\circ$$

$$= 30^\circ \quad \text{بالتبسيط}$$

$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = 0.5 \quad \text{الجيبُ موجبٌ في الربع الثاني}$$



2 $\cos 225^\circ$

يقع ضلعُ الانتهاء للزاوية 225° في الربع الثالث؛ لذا نستخدمُ زاويتها المرجعية:

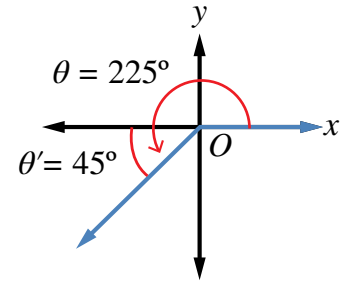
$$\theta' = \theta - 180^\circ \quad \text{إيجادُ قياسِ الزاوية المرجعية}$$

$$= 225^\circ - 180^\circ \quad \theta = 225^\circ$$

$$= 45^\circ \quad \text{بالتبسيط}$$

$$\cos 225^\circ = -\cos 45^\circ \quad \text{جيبُ التمامٍ سالبٌ في الربع الثالث}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$$



3 $\tan 300^\circ$

يقع ضلعُ الانتهاء للزاوية 300° في الربع الرابع؛ لذا نستخدمُ زاويتها المرجعية:

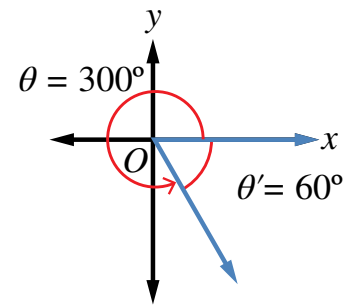
$$\theta' = 360^\circ - \theta \quad \text{إيجادُ قياسِ الزاوية المرجعية}$$

$$\theta' = 360^\circ - 300^\circ \quad \theta = 300^\circ$$

$$= 60^\circ \quad \text{بالتبسيط}$$

$$\tan 300^\circ = -\tan 60^\circ \quad \text{الظلُّ سالبٌ في الربع الرابع}$$

$$= -\sqrt{3}$$



يُمْكِنُ أَيْضًا إِيجَادُ $\sin 255^\circ$ مَبَاشِرَةً بِاسْتِعْمَالِ الْآلَةِ الْحَاسِبَةِ مِنْ دُونِ إِيجَادِ الزَّوَايَةِ الْمَرْجِعِيَّةِ عَلَى النِّحْوِ الْآتِي:

أَضْغَطْ عَلَى مِفْتَاحِ **sin** ، ثُمَّ أَدْخِلْ الْقِيَمَةَ 255 ، ثُمَّ أَضْغَطْ عَلَى مِفْتَاحِ **=** ، فَتَظْهَرُ النَتِيْجَةُ:

$$\sin 255 = -0.965925826$$

بِالتَّقْرِيْبِ إِلَى ثَلَاثِ مَنَازِلٍ عَشْرِيَّةٍ، تَكُونُ النَتِيْجَةُ -0.966 ، وَهِيَ النَتِيْجَةُ نَفْسُهَا الَّتِي تَوَصَّلَتْ إِلَيْهَا أَنْفَاءً.

2 $\tan 168^\circ$

أَضْغَطْ عَلَى مِفْتَاحِ **tan** ، ثُمَّ أَدْخِلْ الْقِيَمَةَ 168 ، ثُمَّ أَضْغَطْ عَلَى مِفْتَاحِ **=** ، فَتَظْهَرُ النَتِيْجَةُ:

$$\tan 168 = -0.212556561$$

بِالتَّقْرِيْبِ إِلَى ثَلَاثِ مَنَازِلٍ عَشْرِيَّةٍ، تَكُونُ النَتِيْجَةُ: -0.213

$$\tan 168^\circ \approx -0.213$$

أَتَحَقَّقُ مِنْ فَهْمِي 

أَجِدُ قِيَمَةَ كُلِّ مِمَّا يَأْتِي بِاسْتِعْمَالِ الْآلَةِ الْحَاسِبَةِ، مُقَرَّبًا إِجَابِيًّا إِلَى أَقْرَبِ ثَلَاثِ مَنَازِلٍ عَشْرِيَّةٍ:

a) $\sin 320^\circ$

b) $\cos 175^\circ$

c) $\tan 245^\circ$

يُمْكِنُ اسْتِعْمَالُ الْآلَةِ الْحَاسِبَةِ لِإِيجَادِ قِيَاسِ أَيِّ زَاوِيَةٍ حَادَّةٍ (فِي الرَّبْعِ الْأَوَّلِ) عُلِمَتْ إِحْدَى نَسِبِهَا الْمَثَلِيَّةِ، وَذَلِكَ بِاسْتِعْمَالِ مَعْكُوسِ النِّسْبَةِ الْمَثَلِيَّةِ (inverse trigonometric ratio).
فَإِذَا عُلِمَ جَيْبُ الزَّوَايَةِ اسْتُعْمِلَ مَعْكُوسُ الْجَيْبِ (\sin^{-1})، وَإِذَا عُلِمَ جَيْبُ تَمَامِ الزَّوَايَةِ اسْتُعْمِلَ مَعْكُوسُ جَيْبِ التَّمَامِ (\cos^{-1})، وَإِذَا عُلِمَ ظِلُّ الزَّوَايَةِ اسْتُعْمِلَ مَعْكُوسُ الظِّلِّ (\tan^{-1}).
وَبِالطَّرِيقَةِ نَفْسِهَا، يُمْكِنُ إِيجَادُ قِيَاسِ أَيِّ زَاوِيَةٍ فِي الْأَرْبَاعِ الثَّلَاثَةِ الْبَاقِيَّةِ بِاسْتِعْمَالِ مَفْهُومِ الزَّوَايَةِ الْمَرْجِعِيَّةِ وَإِشَارَاتِ النِّسْبِ الْمَثَلِيَّةِ فِي الْأَرْبَاعِ الْأَرْبَعَةِ.

لُغَةُ الرِّيَاضِيَّاتِ

- نَقْرَأُ مَعْكُوسَ الْجَيْبِ
.sine inverse

- نَقْرَأُ مَعْكُوسَ جَيْبِ التَّمَامِ
.cosine inverse

- نَقْرَأُ مَعْكُوسَ الظِّلِّ
.tan inverse

مثال 3

أجد قيمة (أو قيم) θ في ما يأتي، علمًا بأن $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ ، مُقَرَّبًا إيجابيًا إلى أقرب عُشر درجة:

1 $\sin \theta = 0.98$

$$\theta = \sin^{-1}(0.98)$$

θ هي الزاوية التي نسبة الجيب لها 0.98

والآن، أستخدم الآلة الحاسبة لإيجاد $\sin^{-1}(0.98)$ كما يأتي:



وبالتقريب إلى أقرب عُشر درجة، تكون النتيجة: 78.5° ، وهي زاوية مرجعية لزاوية أخرى؛ لأنها تقع في الربع الأول. وبما أن الجيب موجب في ربعين (الأول والثاني فقط)، فإن الزاوية الأخرى θ تكون في الربع الثاني، ويمكن إيجادها باستعمال العلاقة بين الزاوية المرجعية والزاوية المناظرة في الربع الثاني التي تعرفتها آنفًا.

$$\theta' = 180^\circ - \theta$$

العلاقة بين الزاوية المرجعية والزاوية المناظرة في الربع الثاني

$$\theta' = 78.5^\circ$$

$$78.5^\circ = 180^\circ - \theta$$

$$\theta = 101.5^\circ$$

بحل المعادلة

$$\text{إذن، } \theta = 78.5^\circ \text{، أو } \theta = 101.5^\circ$$

2 $\tan \theta = -1.2$

$$\theta = \tan^{-1}(-1.2)$$

θ هي الزاوية التي نسبة الظل لها تساوي -1.2

والآن، أستخدم الآلة الحاسبة لإيجاد $\tan^{-1}(-1.2)$ كما يأتي:



وبالتقريب إلى أقرب عُشر درجة، تكون النتيجة: 50.2° ؛ ولأن الظل يكون سالبًا في ربعين فقط (الثاني والرابع)؛ فإن الزاوية 50.2° ليست من الحلول، وإنما زاوية مرجعية لها.

إرشاد

بعض الآلات الحاسبة تحوي المفتاح 2ND بدلاً من المفتاح SHIFT.

أفكر

أتجاهل الإشارة السالبة. لماذا؟

إذا استعملنا العلاقة بين الزاوية المرجعية والزاويا المناظرة في الربعين الثاني والرابع، فإننا سنجد هاتين الزاويتين:

$$\text{زاوية الربع الثاني: } 180^\circ - 50.2^\circ = 129.8^\circ$$

$$\text{زاوية الربع الرابع: } 360^\circ - 50.2^\circ = 309.8^\circ$$

أتحقق من فهمي

أجد قيمة (أو قيم) θ في كل مما يأتي، علمًا بأن $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ ، مُقرَّبًا إجابتي إلى أقرب عُشر درجة:

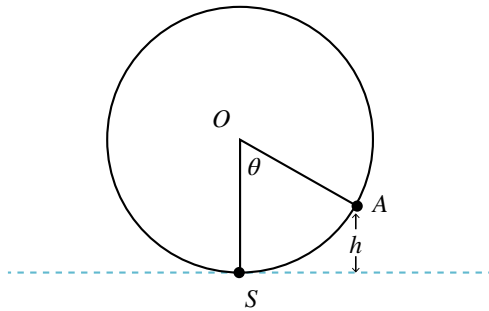
a) $\cos \theta = -0.4$

b) $\tan \theta = 5.653$

c) $\sin \theta = -0.5478$

مثال 4: من الحياة

نواعير: يُمثّل الشكل الآتي ناعورة ماءٍ تدورُ بسرعةٍ ثابتة، وتُمثّل S في الشكل أخفض نقطة تبلغها الناعورة تحت الماء، في حين تُمثّل النقطة O مركز الناعورة. إذا دارت الناعورة بزاوية θ ؛ فإن ارتفاع صندوق الماء الذي موقعه النقطة A عن أخفض نقطة تبلغها الناعورة يُعطى بالعلاقة: $h = 7.5 - 7.5 \cos \theta$ حيث h الارتفاع بالأمتر. أجد طول قطر الناعورة.



عندما يصل الصندوق إلى النقطة الواقعة فوق S مباشرة، فإن ارتفاعه عن أخفض موقع له يُساوي طول قطر الناعورة، ويكون قياس θ في تلك اللحظة 180° :

$$h = 7.5 - 7.5 \cos 180^\circ$$

بتعويض قيمة θ

$$= 7.5 - 7.5 (-1)$$

$$\cos 180^\circ = -1$$

$$= 7.5 + 7.5 = 15$$

بالتبسيط

إذن، طول قطر الناعورة هو: 15 m

أتحقق من فهمي

أجد ارتفاع صندوق الماء الذي موقعه النقطة A عندما تصبح $\theta = 235^\circ$



الناعورة آلة مائية دائرية تتحرك بفعل جريان مياه الأنهار، وترفع الماء بواسطة صناديق إلى حوضٍ علويٍّ؛ فينسب في قنواتٍ نحو البساتين على ضفة النهر.



أجد قيمة كل مما يأتي:

1 $\cos 270^\circ$

2 $\tan 120^\circ$

3 $\tan 315^\circ$

أجد قيمة كل مما يأتي باستعمال الآلة الحاسبة، مُقربًا إجابتي إلى أقرب ثلاث منازل عشرية:

4 $\sin 130^\circ$

5 $\sin 325^\circ$

6 $\cos 250^\circ$

أجد في ما يأتي زاوية ثانية بين 0° و 360° ، لها نسبة الجيب نفسها، مثل الزاوية المعطاة:

7 325°

8 84°

9 245°

أجد في ما يأتي زاوية ثانية بين 0° و 360° ، لها نسبة جيب التمام نفسها، مثل الزاوية المعطاة:

10 280°

11 150°

12 215°

أجد في ما يأتي زاوية ثانية بين 0° و 360° ، لها نسبة الظل نفسها، مثل الزاوية المعطاة:

13 75°

14 300°

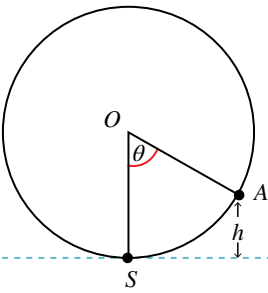
15 235°

أجد في ما يأتي قيمة (أو قيم) θ ، علمًا بأن $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ ، مُقربًا إجابتي إلى أقرب عُشر درجة (إن لزم):

16 $\sin \theta = 0.55$

17 $\cos \theta = -0.05$

18 $\tan \theta = 0$



19 **ترفيه:** يُمثل الشكل الآتي دولابًا دوّارًا في مدينة ألعابٍ يدورُ بسرعة ثابتة، وتُمثل K في

الشكل نقطة صعود الراكب الذي موقعه الآن عند النقطة A ، في حين تُمثل النقطة O

مركز الدولاب. إذا دار الدولابُ بزاوية θ ، فإن ارتفاع الراكب عن الأرض (h)

بالأمتار يُعطى بالعلاقة: $h = 12.5 - 12.5 \cos \theta$. أجد ارتفاع الراكب عن سطح

الأرض عندما تصبح $\theta = 345^\circ$.

20 أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

مهارات التفكير العليا



21 **نحد:** أجد مجموعة قيم θ التي تجعل المتباينة الآتية صحيحة، علمًا بأن $90^\circ < \theta < 180^\circ$:

$$\cos \theta + \sin \theta < 0$$

22 **أكتشف الخطأ:** حسبت سندس نسبة جيب إحدى الزوايا في الربع الثاني، فكانت قيمتها 1.4527

هل إجابتي سندس صحيحة؟ أبرر إجابتي.

23 **تبرير:** أجد قيمة ما يأتي، وأبرر إجابتي:

$$\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 357^\circ + \cos 358^\circ + \cos 359^\circ + \cos 360^\circ$$

تمثيل الاقترانات المثلثية Graphing Trigonometric Functions

تمثيل اقتراناتٍ مثلثيةٍ مجالها الفترة $[0^\circ, 360^\circ]$ بيانياً.

فكرة الدرس



يرتبط عمق الماء عند نقطةٍ مُعيَّنة في أحد الموانئ بالزمن حسب العلاقة:

مسألة اليوم



$$y = \sin x, x \geq 0$$

حيث: y عمق الماء بالأمتار، و x الزمن بالساعات بعد منتصف الليل. هل يمكن رسم منحنى يُبين تغيُّر عمق الماء في الميناء مع مرور الوقت؟



تُستخدمُ الاقتراناتُ المثلثيةُ في تمثيلِ مواقفٍ حياتيةٍ مرتبطةٍ بالحركةِ الدوريةِ، مثل: موجاتِ الصوتِ، وضغطِ الدمِ في جسمِ الإنسانِ، وارتفاعِ مقعدٍ في دولابٍ دوَّارٍ، وتغيُّرِ عددِ ساعاتِ النهارِ خلالَ عامٍ، وغيرِ ذلك. ولكن، هل يُمكنُ رسمُ منحنىِ اقترانٍ يُبينُ كيفَ تبدو الحركةُ الدوريةُ التي تُمثِّلُها هذه الاقتراناتُ؟

تعلمتُ سابقاً كيفيةَ تمثيلِ اقتراناتٍ خطيةٍ وتربيعيةٍ في المستوى الإحداثيِّ بإنشاءِ جدولِ قيمٍ للمتغيِّرينِ x و y ، وتمثيلِ كلِّ زوجِ (x, y) بنقطةٍ في المستوى، ثم رسمِ المنحنى الذي يصلُّ هذه النقاطَ ببعضها. وفي هذا السياقِ، يُمكنُ اتِّباعُ الطريقةِ نفسها لتمثيلِ الاقتراناتِ المثلثيةِ.

مثال 1

أرسمُ منحنى كلِّ من الاقترانين الآتيين ثم أصفهُ، علماً بأن $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$:

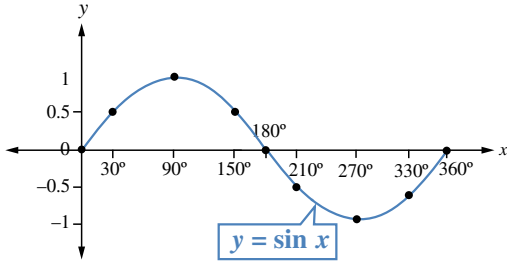
1 $y = \sin x$

الخطوة 1: أكوِّنُ جدولاً أكتبُ فيه زوايا شائعةً، نسبها المثلثية معروفةً، مثل: الزوايا الربعية، والزوايا التي زاويتها المرجعية 30° .

الخطوة 2: أجدُ قيمة $\sin x$ لكلِّ زاويةٍ x ، ثم أكتبها في الجدول:

x	0°	30°	90°	150°	180°	210°	270°	330°	360°
$y = \sin x$	0	0.5	1	0.5	0	-0.5	-1	-0.5	0

الخطوة 3: أعيّن الأزواج المُرتّبة: $(0^\circ, 0), (30^\circ, 0.5), (90^\circ, 1), \dots, (360^\circ, 0)$



في المستوى الإحداثي.

الخطوة 4: أصِل بمنحنى أملس بين

النقاط، فينتج رسمٌ كما في الشكل المجاور.

من التمثيل البياني لاقتران $\sin x$ ، ألاحظُ أن:

- أكبر قيمةٍ للاقتران $\sin x$ هي 1، وأصغر قيمةٍ له هي -1
- $\sin x$ يكون موجبًا إذا كانت $0^\circ < x < 180^\circ$ وسالبًا إذا كانت $180^\circ < x < 360^\circ$.

2 $y = \cos x$.

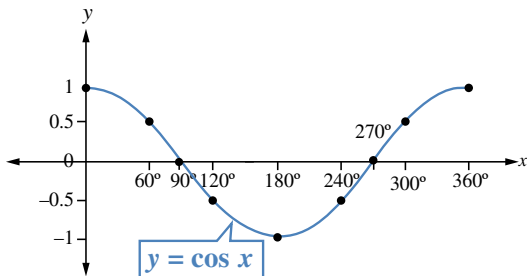
الخطوة 1: أكوّن جدولًا أكتب فيه زوايا شائعة.

الخطوة 2: أجد قيمة $\cos x$ لكل زاوية x ، ثم أكتبها في الجدول:

x	0°	60°	90°	120°	180°	240°	270°	300°	360°
$y = \cos x$	1	0.5	0	-0.5	-1	-0.5	0	0.5	1

الخطوة 3: أعيّن الأزواج المُرتّبة: $(0^\circ, 1), (60^\circ, 0.5), (90^\circ, 0), \dots, (360^\circ, 1)$ في

المستوى الإحداثي، وأصل بين النقاط بمنحنى أملس.



من التمثيل البياني لاقتران $\cos x$ ، ألاحظُ أن:

- أكبر قيمةٍ للاقتران $\cos x$ هي 1، وأصغر قيمةٍ له هي -1

أفكر

ما العلاقة بين منحنى اقتران الجيب والزوايا المرجعية التي تعلّمتها في الدرس السابق؟

إرشاد

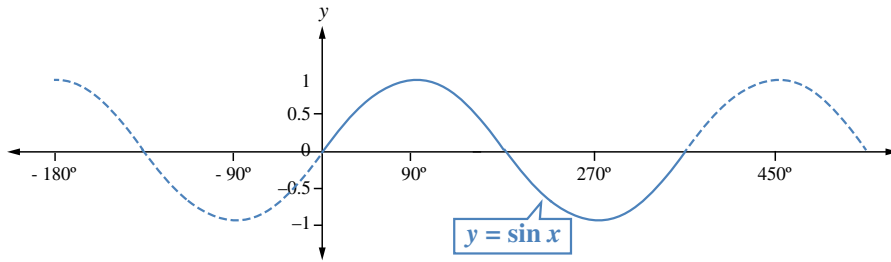
يُمكن استعمال برمجية جيوجبرا لتمثيل الاقتران $\cos x$ ، وملاحظة أكبر قيمةٍ له، وأصغر قيمةٍ له أيضًا.

- $\cos x$ يكون موجبا إذا كانت $0^\circ \leq x < 90^\circ$ و $270^\circ < x \leq 360^\circ$ ، وسالبا إذا كانت $90^\circ < x < 270^\circ$.

أتتحقق من فهمي

أرسم منحنى الاقتران $y = \sin x$ ، علما بأن $90^\circ \leq x \leq 360^\circ$ ، مُستعملا زوايا مختلفة عن تلك التي في الجدول السابق، ثم أجد قيم الجيب لهذه الزوايا باستعمال الآلة الحاسبة.

تعرفت أنه توجد زوايا أكبر من 360° . فإذا دار ضلع انتهاء الزاوية (في الوضع القياسي) أكثر من دورة واحدة عكس اتجاه عقارب الساعة، فإنه يكون زوايا أكبر من 360° ، وإذا دار مع اتجاه عقارب الساعة، فإنه يكون زوايا قياسها سالبا؛ ولهذا، فقد يكون قياس الزاوية أي عدد حقيقي، علما بأنه يمكن تمثيل الاقترانات المثلثية للأعداد الحقيقية جميعها، وليس فقط للزوايا الواقعة بين 0° و 360° ، ألاحظ منحنى اقتران الجيب الآتي.



كاشف الاهتزاز (الأوسيليسكوب) هو جهاز يرسم جهد الإشارات الإلكترونية على شكل مُخطَّط يُشبه التمثيل البياني لاقتران الجيب، ويُستعمل لاكتشاف أعطال الأجهزة الكهربائية.

والآن، سأرسم منحنى الاقتران $y = \tan x$ ، ملاحظا الفرق بينه وبين منحنى الاقتران $\sin x$ ، و $\cos x$.

مثال 2

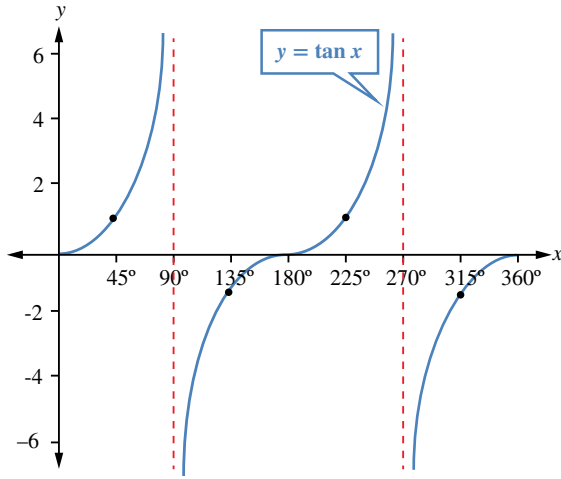
أرسم منحنى الاقتران $y = \tan x$ ، ثم أصفُه علما بأن $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$:

الخطوة 1: أكون جدولا، ثم أكتب فيه زوايا شائعة.

الخطوة 2: أجد قيمة $\tan x$ لكل زاوية x ، ثم أكتبها في الجدول:

x	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
$\tan x$	0	1	غير مُعرَّف	-1	0	1	غير مُعرَّف	-1	0

الخطوة 3: أعيّن النقاط في المستوى الإحداثي، ملاحظاً صعوبة التوصل بين النقاط بمنحنى واحد؛ لأن قيمة $\tan x$ غير مُعرّفة للزاويتين 90° و 270° ؛ لذا أصل النقاط قبل الزاوية 90° ببعضها، والنقاط بين الزاويتين 90° و 270° ببعضها، والنقاط بعد الزاوية 270° ببعضها، فينتج رسمٌ كما في الشكل الآتي.



أَتَعَلَّمُ

يُسمّى كلٌّ من المستقيمين $x = 90^\circ$ و $x = 270^\circ$ خطّ تقاربٍ رأسيٍّ لمنحنى $\tan x$ ؛ لأنّ المنحنى يقترب كثيراً منهما، لكنّه لا يقطعُهُما.

يبيّن الشكل أنّ منحنى $\tan x$ غير متصل؛ فهو مُكوّن من عدّة قطع، وأنّ الظلّ موجبٌ بين الزاويتين 0° و 90° ، وبين الزاويتين 180° و 270° ، وأنّه يكون سالباً بين الزاويتين 90° و 180° ، وبين الزاويتين 270° و 360° .

أَتَحَقِّقُ مِنْ فَهْمِي

أرسم منحنى الاقتران $y = \tan x$ ، علماً بأنّ $90^\circ < x < 270^\circ$ ، مُستعملاً زوايا مختلفةً عن تلك التي في الجدول السابق، ثمّ أجد قيم الظلّ لهذه الزوايا باستعمال الآلة الحاسبة.

أَتَدْرِبُ وَأَحْلُ الْمَسَائِلَ

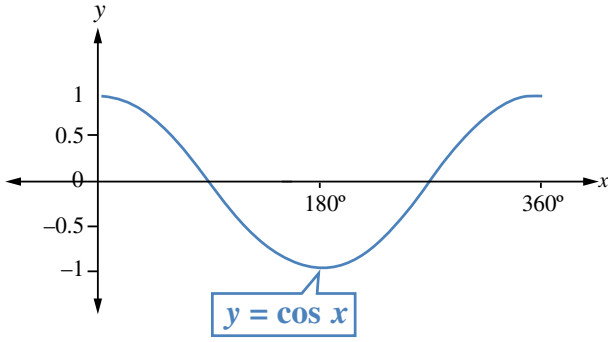
أرسم منحنى الاقتران لكلّ ممّا يأتي في الفترة المعطاة، ثمّ أصفه:

1 $y = \sin x \quad 0^\circ \leq x \leq 270^\circ$

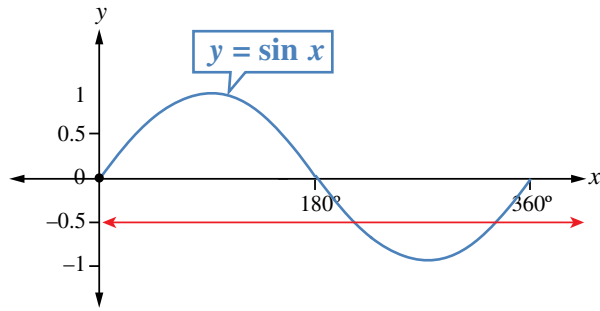
2 $y = \cos x \quad 0^\circ \leq x \leq 180^\circ$

3 $y = \sin x \quad 0^\circ \leq x \leq 180^\circ$

4 $y = \tan x \quad 0^\circ \leq x \leq 180^\circ$

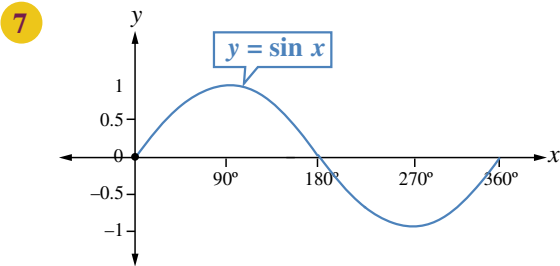


5 يُبين الشكل المجاور جزءاً من التمثيل البياني للاقتران $y = \cos x$ بناءً على هذا الشكل، أقدّر قيمتين للمتغير x يكون عندهما $\cos x = -0.5$

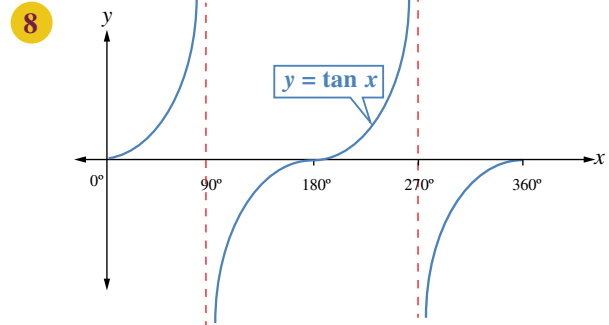


6 يُبين الشكل المجاور جزءاً من التمثيل البياني للاقتران $y = \sin x$ بناءً على هذا الشكل، أقدّر قيمتين للمتغير x يكون عندهما $\sin x = -0.5$

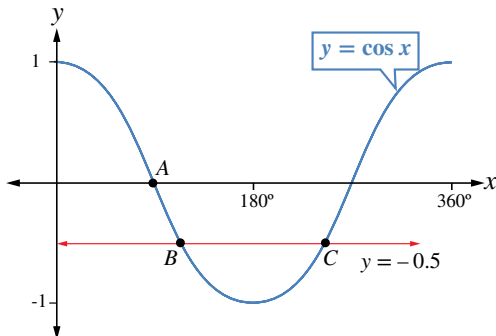
أستعمل التمثيلات البيانية الآتية لأجد جميع القيم الممكنة لكلٍّ من: a, b, c, d, e, f, g, h .



$$\begin{aligned} \sin 0^\circ &= \sin a^\circ = \sin b^\circ \\ \sin 30^\circ &= \sin c^\circ \\ \sin 60^\circ &= \sin d^\circ \\ \sin 210^\circ &= \sin e^\circ \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \tan 0^\circ &= \tan e^\circ = \tan f^\circ \\ \tan 45^\circ &= \tan g^\circ \\ \tan 60^\circ &= \tan h^\circ \end{aligned}$$



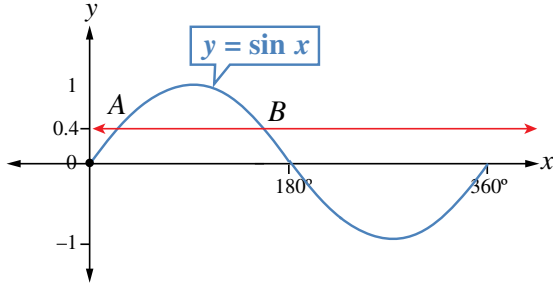
يُبين الشكل المجاور جزءاً من التمثيل البياني للاقتران $y = \cos x$ الذي يقطعه المستقيم $y = -0.5$ في النقطتين B, C :

9 أجد إحداثيات النقطة A .

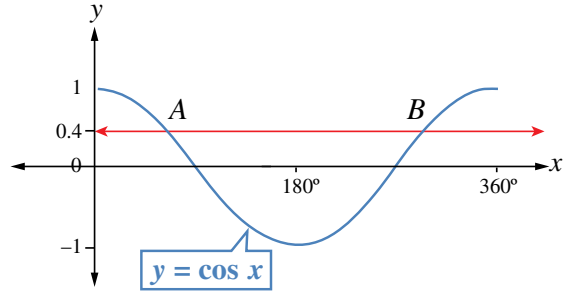
10 أجد إحداثيات النقطتين B, C باستعمال الآلة الحاسبة.

أجد إحداثيات النقطتين A و B في كل شكل مما يأتي باستعمال الآلة الحاسبة:

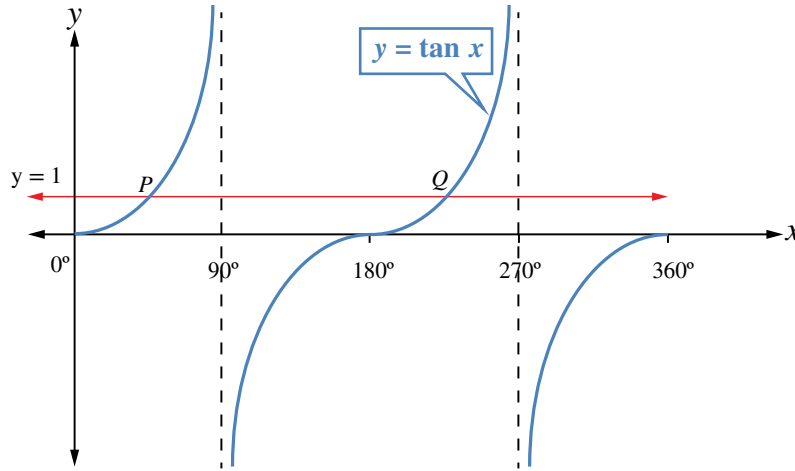
11



12



13 يُبين الشكل الآتي جزءاً من التمثيل البياني للاقتران $y = \tan x$ ، حيث يقطع المستقيم $y = 1$ منحنى $y = \tan x$ في النقطتين P ، و Q . أكتب الإحداثي x لكل من النقطتين P ، و Q .



مهارات التفكير العليا



14 تحدّ: أرسّم منحنَيي الاقترانين $y = \cos x$ و $f = 2 \cos x$ في المستوى الإحداثي نفسه، في الفترة $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ ، ثمّ أقرّن بينهما.

15 أكتب: ما الفرق بين منحنَيي الجيب وجيب التمام؟

حَلُّ المعادلاتِ المثلثيةِ Solving Trigonometric Equations

حَلُّ معادلاتٍ تتضمنُ النسبَ المثلثيةَ الأساسيةَ، وتكونُ فيها مجموعةُ الحَلِّ ضمنَ دورةٍ واحدةٍ.
المعادلةُ المثلثيةُ.

فكرةُ الدرس



المصطلحات



مسألة اليوم



ساعةٌ حائطٍ كبيرةٌ مُعلَّقةٌ على جدارِ غرفةٍ. إذا كانَ طولُ عقربِ الساعاتِ فيها 16 cm، وبعُدُ رأسِ العقربِ عنُ سقفِ الغرفةِ يُمثَّلُ دائماً بالعلاقة: $d = -60 \cos(30x) + 110$ ، حيثُ: d البُعْدُ بالسنتيمتر، و x الوقتُ بالساعاتِ، فما الوقتُ الذي يبعُدُ فيه رأسُ عقربِ الساعاتِ 118 cm عنِ السقفِ؟

المعادلةُ المثلثيةُ (trigonometric equation) هي معادلةٌ مُتغيِّرُها نسبٌ مثلثيةٌ لزاويةٍ مجهولةٍ. وحَلُّ المعادلةِ المثلثيةِ يعني إيجادَ الزاويةِ (أو الزوايا) التي تُحقِّقُ هذه المعادلةَ، وتُجعلُ منها عبارةً صحيحةً.

من الأمثلة على المعادلات المثلثية:

$$\sin x = 0.5 \quad \tan x = 2.435 \quad 2 + \cos x = 3 - 2 \cos x \quad 2 \sin^2 x = 3$$

يُمكنُ حَلُّ بعضِ المعادلاتِ، مثل: $\sin x = a$ ، و $\cos x = a$ ، باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ، أو استعمالِ ما نتذكَّره منُ نسبِ الزوايا الخاصةِ.

مثال 1

أحلُّ المعادلتين الآتيتين، علماً بأن $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$:

1 $2 \sin x = 1$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ$$

ولأنَّ الجيبَ يكونُ أيضًا موجبًا في الربعِ الثاني؛ فإنَّهُ يوجدُ حَلُّ آخرٌ للمعادلةِ هو:

$$180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

إذن، لهذه المعادلةِ حلانِ ضمنَ الفترةِ المعطاةِ في المسألة، هما: 30° ، و 150° .

أَتَذَكَّرُ

يكونُ جيبُ الزاويةِ موجبًا في الربعين: الأول، والثاني.

2 $3 \cos x - 1 = 2$

$3 \cos x = 3$

$\cos x = 1$

$x = \cos^{-1}(1) = 0^\circ$

لهذه المعادلة حلان ضمن الفترة المعطاة في المسألة، هما: 0° و 360°

بإضافة 1 إلى الطرفين

بقسمة طرفي المعادلة على 3

باستعمال الآلة الحاسبة

أتحقق من فهمي 

أحلُّ المعادلتين الآتيتين، علمًا بأنَّ $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$:

a) $2 \cos x = \sqrt{3}$

b) $2 \tan x + 3 = 1$

يتطلبُ حلُّ بعض المعادلات مزيدًا من التبسيط والمعالجة قبل استعمال الآلة الحاسبة.

مثال 2

أحلُّ المعادلتين الآتيتين، مُقرَّبًا إجابتي إلى أقرب عُشرٍ درجة:

1 $2(\tan x - 3) + 4 = 12, 0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

$2 \tan x - 6 + 4 = 12$

باستعمال الخاصية التوزيعية

$2 \tan x = 14$

بالتبسيط

$\tan x = 7$

بقسمة طرفي المعادلة على 2

$x = \tan^{-1}(7)$

تعريفُ معكوس الظلِّ

$x \approx 81.9^\circ$

باستعمال الآلة الحاسبة

ولأنَّ الظلَّ يكونُ أيضًا موجبًا في الربع الثالث؛ فإنه يوجدُ حلُّ آخرٌ للمعادلة هو:

$180^\circ + 81.9^\circ \approx 261.9^\circ$

إذن، لهذه المعادلة حلان ضمن الفترة المعطاة في المسألة، هما: 81.9° و 261.9°

أتذكَّر

الزوايا المرجعية هي الزوايا المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ الحادة المرسومة في الوضع القياسي والمحور x .

2 $1 + 4 \sin (3x) = 2.5, 0^\circ \leq x \leq 90^\circ$

$$4 \sin (3x) = 2.5 - 1$$

بطرح 1 من الطرفين

$$\sin (3x) = \frac{1.5}{4}$$

بقسمة طرفي المعادلة على 4

$$\sin \theta = \frac{1.5}{4} = 0.375$$

باستعمال الرمز θ بدلاً من $3x$ ،

حيث: $0^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$

$$\theta = \sin^{-1}(0.375)$$

تعريف معكوس الجيب

$$\theta \approx 22.0^\circ$$

باستعمال الآلة الحاسبة

$$22^\circ \approx 3x \Rightarrow x \approx 7.3^\circ$$

ولأن الجيب يكون أيضًا موجبًا في الربع الثاني؛ فإنه يوجد حل آخر للمعادلة هو:

$$180^\circ - 22^\circ \approx 158^\circ$$

الزاوية في الربع الثاني

$$\theta = 3x \approx 158^\circ$$

بالتعويض

$$x \approx 52.7^\circ$$

بقسمة طرفي المعادلة على 3

إذن، للمعادلة $1 + 4 \sin (3x) = 2.5$ حلان ضمن الفترة المعطاة في المسألة، هما:

$$7.3^\circ \text{ و } 52.7^\circ$$

أتحقق من فهمي 

أحل المعادلتين الآتيتين، مُقَرَّبًا إجابتي إلى أقرب عُشر درجة:

a) $3 (\sin x + 2) = 3 - \sin x, 0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

b) $3 \cos (2x) - 1 = 0, 0^\circ \leq x \leq 180^\circ$

يُمكنُ حلُّ المعادلات المثلثية التربيعية بطرائقٍ مشابهةٍ لطرائقِ حلِّ المعادلات التربيعية الجبرية، أبرزها: إيجاد العامل المشترك، والتحليل إلى ناتج ضرب قوسين، وغير ذلك من الطرائق التي تعرَّفناها سابقًا.

معلومة أساسية

إذا كانت $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ ،

فإنَّ $0^\circ \leq 3x \leq 270^\circ$

مثال 3

أحلّ المعادلتين الآتيتين، علمًا بأن $0^\circ \leq x < 360^\circ$ ، مُقرَّبًا إجابتي إلى أقرب عُشرِ درجةٍ (إن لَزِمَ):

1 $3 \sin x \cos x - 2 \sin x = 0$

تحتوي هذه المعادلة نسبتين مثلثيتين، ويُلاحظُ أنّ $\sin x$ تكررَ في حدّي المعادلة، ما يعني أنّها تُشبهُ المعادلة $3yz - 2y = 0$ ؛ لذا يُمكنُ تحليلُها بإخراج عاملٍ مشتركٍ:

$\sin x (3 \cos x - 2) = 0$ بإخراج العامل المشترك $\sin x$

$3 \cos x - 2 = 0, \sin x = 0$ خاصية الضرب الصفريّ

وبذلك أتوصّل إلى معادلتين بسيطتين، ثمّ أحلُّ كلَّ معادلةٍ على حِدَةٍ:

$\sin x = 0$ المعادلة الأولى

$x = 0^\circ, x = 180^\circ$ باستعمال الآلة الحاسبة، أو جدول الزوايا الخاصة

$3 \cos x - 2 = 0$ المعادلة الثانية

$3 \cos x = 2$ بإضافة 2 إلى الطرفين

$\cos x = \frac{2}{3}$ بقسمة الطرفين على 3

$x = \cos^{-1}(\frac{2}{3})$ تعريف معكوس جيب التمام

$x \approx 48.2^\circ$ باستعمال الآلة الحاسبة

ولأنّ جيب التمام يكون أيضًا موجبًا في الربع الرابع؛ فإنّه يوجد حلٌّ آخرٌ للمعادلة هو:

$x \approx 360^\circ - 48.2^\circ \approx 311.8^\circ$

إذن، حلولُ هذه المعادلة هي: $0^\circ, 180^\circ, 48.2^\circ, 311.8^\circ$

2 $3 \sin^2 x = 2 \sin x + 1$

أجعلُ الطرفَ الأيمنَ من المعادلة صفرًا بطرح $(2 \sin x + 1)$ من الطرفين:

$3 \sin^2 x - 2 \sin x - 1 = 0$

هذه المعادلة تُشبهُ المعادلة الجبرية $3y^2 - 2y - 1 = 0$ ؛ لذا يُمكنُ حلُّها بالتحليل إلى العوامل:

$(3 \sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$ بالتحليل إلى العوامل

$3 \sin x + 1 = 0, \sin x - 1 = 0$ خاصية الضرب الصفريّ

أتذكّر

يكونُ جيبُ تمامِ الزاوية موجبًا في الربعين: الأول، والرابع.

$$3 \sin x + 1 = 0$$

المعادلة الأولى

$$3 \sin x = -1$$

ب طرح 1 من الطرفين

$$\sin x = -\frac{1}{3}$$

بقسمة الطرفين على 3

$$x = \sin^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$$

تعريف معكوس الجيب

$$x \approx 19.5^\circ$$

باستعمال الآلة الحاسبة، وتجاهل الإشارة السالبة

يُمثّل ما سبق الزاوية المرجعية للحلّ، لا الحلّ نفسه؛ لأنّ الجيب سالب في الربعين: الثالث، والرابع.

حلّ هذه المعادلة في الربع الثالث هو: $180^\circ + 19.5^\circ \approx 199.5^\circ$

وحلّها في الربع الرابع هو: $360^\circ - 19.5^\circ \approx 340.5^\circ$

والآن، أحلّ المعادلة $\sin x - 1 = 0$:

$$\sin x = 1$$

بإضافة 1 إلى الطرفين

$$x = \sin^{-1}(1)$$

تعريف معكوس الجيب

$$x = 90^\circ$$

باستعمال الآلة الحاسبة، أو جدول الزوايا الخاصة

إذن، حلول هذه المعادلة هي: $90^\circ, 199.5^\circ, 340.5^\circ$

أتتحقق من فهمي

أحلّ المعادلتين الآتيتين، علماً بأنّ $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ ، مُقرباً إجابتي إلى أقرب عُشر درجة (إن لزم):

a) $4 \sin x \tan x + 3 \tan x = 0$

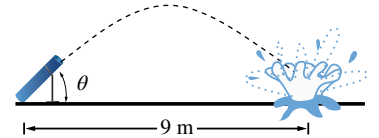
b) $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$

مثال 4: من الحياة

مدفع هوائي يميل عن الأرض بزاوية قياسها θ . انطلق من فوهته بالون مملوء بالماء بسرعة ابتدائية مقدارها 12 m/s، فسقط على بُعد 9 m من المدفع. إذا كانت العلاقة التي تُمثّل المسافة الأفقية d التي يقطعها البالون هي:

$$d = \frac{1}{10} v^2 \sin 2\theta$$

حيث v سرعة البالون الابتدائية، فما قيمة θ ؟ أقرب إجابتي إلى أقرب عُشر درجة.



الخطوة 1: أعوض القيم المعطاة في المسألة في المعادلة المعطاة، ثم أحلها لإيجاد قيمة θ .

$$9 = \frac{1}{10} (12)^2 \sin 2\theta$$

الخطوة 2: لتسهيل الحسابات، أفترض أن $x = 2\theta$ ، ثم أحل المعادلة:

$$9 = \frac{1}{10} (12)^2 \sin x \quad \text{المعادلة}$$

$$90 = 144 \sin x \quad \text{بضرب الطرفين في 10، والتبسيط}$$

$$\sin x = \frac{90}{144} \quad \text{بقسمة الطرفين على 144}$$

$$x = \sin^{-1} \frac{90}{144} = 38.7^\circ \quad \text{باستعمال الآلة الحاسبة، والتقريب إلى أقرب عُشر درجة}$$

الخطوة 3: أجد الحل الآخر في الربع الثاني، وهو: $180^\circ - 38.7^\circ = 141.3^\circ$

الخطوة 4: أجد الآن قيمة θ :

$$x = 2\theta \quad \text{العلاقة بين } x \text{ و } \theta$$

$$\theta = \frac{38.7^\circ}{2} = 19.4^\circ \quad \text{أو} \quad \theta = \frac{141.3^\circ}{2} = 70.7^\circ \quad \text{بالقسمة على 2، والتعويض}$$

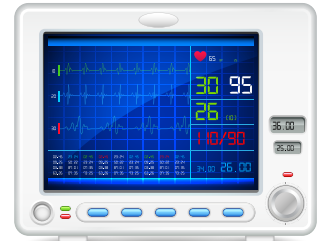
إذن، يصنع المدفع مع الأرض زاوية قياسها 19.4° ، أو 70.7° تقريبًا.

أنتحق من فهمي

فيزياء: فرق الجهد E (بالفولت) في دائرة كهربائية يُعطى بالعلاقة: $E = 20 \cos(180t)$ ، حيث t الزمن (بالثواني):

(a) أفترض أن $x = 180t$ ، وأحل المعادلة $12 = 20 \cos x$ ، علمًا بأن $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ ، مُقربًا إجابتي إلى أقرب عُشر درجة.

(b) أجد الزمن t (حيث $0 \leq t \leq 2$) عندما يكون فرق الجهد 12 volt، مُقربًا إجابتي إلى أقرب جزء من مئة من الثانية.



الكهرباء موجودة في جسم الإنسان أيضًا؛ فعضلات القلب مثلًا تنقبض بتأثير تيارات كهربائية تصل إليها عبر العُقد والوصلات العصبية.



أحلُّ المعادلات الآتية، علماً بأن $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ ، مُقرباً إجابتي إلى أقرب عُشرِ درجةٍ (إن لزم):

1 $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

2 $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

3 $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4 $7 + 9 \cos x = 1$

5 $2 \sin x + 1 = 0$

6 $1 - 2 \tan x = 5$

أحلُّ المعادلات الآتية، علماً بأن $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$ ، مُقرباً إجابتي إلى أقرب عُشرِ درجةٍ (إن لزم):

7 $5 - 2 \cos (4x) = 4$

8 $3 + 4 \tan (2x) = 6$

9 $13 \sin (3x) + 1 = 6$

أحلُّ المعادلات الآتية، مُفترضاً أن قياس الزاوية المجهولة يقع في الفترة $[0^\circ, 360^\circ]$ ، مُقرباً إجابتي إلى أقرب عُشرِ درجةٍ (إن لزم):

10 $2 (\sin x - 2) + 1 = 3 \sin x$

11 $\tan x - 3 (2 \tan x - 1) = 10$

12 $15 \tan x - 7 = 5 \tan x - 3$

13 $5 (\cos x - 1) = 6 + \cos x$

14 $\tan^2 x - 9 \tan x + 20 = 0$

15 $2 \cos^2 x - \cos x = 0$

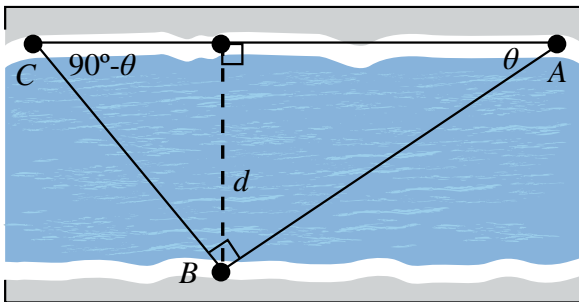
16 $4 \sin^2 x - 3 \sin x = 1$

17 $2 \sin^2 x - 1 = 0$

18 $4 \cos^2 x - 4 = 15 \cos x$

19 $\cos x = \sin x$

20 **ساعات:** أحلُّ المسألة الواردة في بداية الدرس.



21 **سباحة:** سبَّحَ حامدٌ مسافةً 90 m من النقطة A على الضفة الشمالية لنهرٍ إلى النقطة B على الضفة المقابلة، ثم دارَ

بزاوية قائمة، وسبَّحَ مسافةً 60 m إلى نقطة أخرى C على الضفة الشمالية. إذا كان قياس الزاوية CAB هو θ ،

وقياس الزاوية ACB هو $(90^\circ - \theta)$ ، وطول العمود من B إلى

CA يساوي عرض النهر d ، فأعبر عن d بدلالة θ مرّةً،

وبدلالة $(90^\circ - \theta)$ مرّةً أخرى، ثم أكتب معادلة وأحلها لإيجاد قيمة θ ، ثم أجد عرض النهر، مُقرباً إجابتي إلى أقرب

عددٍ صحيح.



22 **دولاب:** يُعطى ارتفاع الراكب عن الأرض في دولابٍ دوّارٍ بالمعادلة:
 $h = 27 - 25\cos \theta$ ، حيث h الارتفاع بالأمتار، و θ قياس الزاوية التي
 دارها الدولاب. متى يكون ارتفاع الراكب عن الأرض 49 m؟

23 **حركة مقذوفات:** المسافة الأفقية التي تقطعها مقذوفة في الهواء (من دون افتراض وجود مقاومة الهواء) تُعطى بالمعادلة:
 $d = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$ ، حيث: v_0 السرعة الابتدائية، و θ الزاوية التي تُطلقُ بها المقذوفة، و g تسارع الجاذبية الأرضية
 (9.8 m/s^2). إذا قُدِّمَت كرة بيسبول بسرعة ابتدائية مقدارها 40 m/s، فما الزاوية التي تُوجَّهُ بها الرمية لكي تقطع الكرة
 مسافة أفقية مقدارها 110 m قبل سقوطها على الأرض؟ ما أبعد نقطة يمكن أن تصلها الكرة إذا قُدِّمَت بهذه السرعة
 الابتدائية؟ أقرب إجابتني إلى أقرب عُشر درجة.

مهارات التفكير العليا



24 **أكتشف الخطأ:** حلّ كلٍّ من علياء وسمير المعادلة: $2\sin x \cos x = \sin x$ ، حيث: $0^\circ \leq x < 360^\circ$:

سمير

الحلان هما: $60^\circ, 300^\circ$ لأن:

$$\frac{2\sin x \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin x}$$

$$2 \cos x = 1$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = 60^\circ, 300^\circ$$

علياء

الحلول هي: $0^\circ, 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$ لأن:

$$\sin x (2 \cos x - 1) = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$x = 0^\circ, 180^\circ$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = 60^\circ, 300^\circ$$

أيهما إجابتُهُ صحيحة؟ أبرّر إجابتني.

25 **تحذّر:** أخلّ المعادلة: $2 \sin x \cos x + \sin x + 2 \cos x + 1 = 0$ ، علماً بأن $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

26 **تحذّر:** أخلّد عدد حلول المعادلة: $\cos x - \sin x - 1 = 0$ ، حيث: $0^\circ \leq x < 360^\circ$.

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 إذا كان $\cos \theta = -0.5$ ، فإن ضلع انتهاء الزاوية θ في

الوضع القياسي يقع في:

(a) الربع الأول. (b) الربعين: الثاني، والثالث.

(c) الربع الرابع. (d) الربعين: الثاني، والرابع.

2 إذا قطع ضلع انتهاء الزاوية θ في الوضع القياسي دائرة

الوحدة في النقطة $P\left(-\frac{40}{41}, \frac{9}{41}\right)$ ، فإن قيمة $\sin \theta$ هي:

a) $-\frac{40}{41}$ b) $\frac{9}{40}$

c) $-\frac{9}{41}$ d) $\frac{9}{41}$

3 قياس الزاوية المرجعية للزاوية 230° هو:

a) 130° b) 40°

c) 50° d) 140°

4 إذا كانت $90^\circ < x < 180^\circ$ ، وكان $\sin x = \frac{8}{17}$ ، فإن

قيمة $\tan x$ هي:

a) $-\frac{8}{15}$ b) $\frac{8}{15}$

c) $\frac{15}{17}$ d) $-\frac{15}{8}$

5 حل المعادلة $x = \sin^{-1}(-1)$ هو:

a) 0° b) 90°

c) 270° d) 360°

أجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية x المرسومة في الوضع القياسي، التي يقطع ضلع انتهاءها دائرة الوحدة عند كل من النقاط الآتية:

6 (0.6, 0.8)

7 $\left(\frac{5}{13}, \frac{-12}{13}\right)$

8 (-1, 0)

9 $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

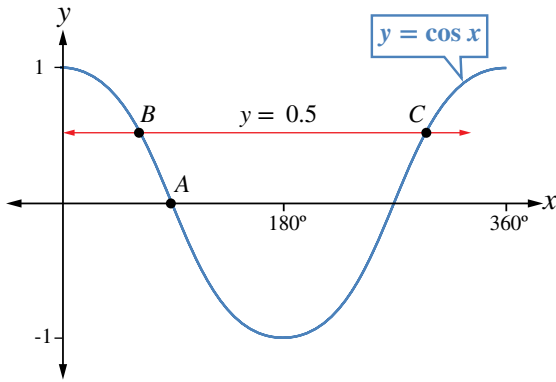
10 (0, 1)

11 (-0.96, 0.28)

يُبين الشكل التالي جزءاً من التمثيل البياني للاقتران المثلثي $y = \cos x$ الذي يقطعُه المستقيم $y = 0.5$ في النقطتين B و C :

12 أجد إحداثيات النقطة A .

13 أجد إحداثيات النقطتين: B ، و C .



أجد النسب المثلثية الأساسية المُتبقية في كل مما يأتي:

14 $\sin x = \frac{-1}{2}$, $270^\circ \leq x \leq 360^\circ$

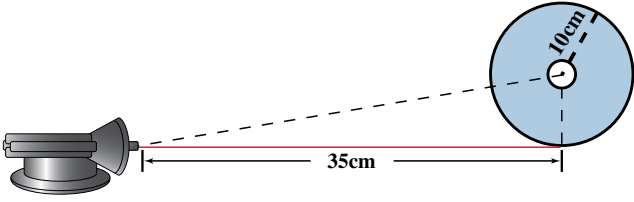
15 $\cos x = 0.4$, $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

16 $\tan x = 3$, $180^\circ \leq x \leq 360^\circ$

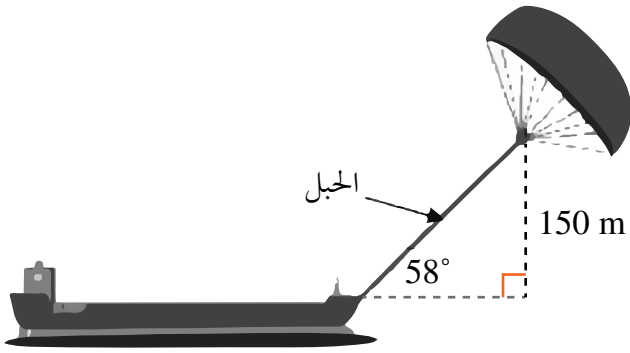
17 $\sin x = -\cos x$, $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$

تدريب على الاختبارات الدولية

32 في تجربة علوم لاكتشاف خصائص الضوء، وُضِعَ مصدرٌ ضوئيٌّ ليزريٌّ على بُعد 35 cm من قرصٍ دائريٍّ مثقوبٍ من مركزه، وكان طولُ نصفِ قطره 10 cm كما في الشكل الآتي. أجدُ زاويةَ الشعاعِ الذي يمرُّ خلالَ ثقبٍ مركزِ هذا القرصِ.



33 لاستغلال طاقة الرياح وخفض استهلاك الوقود؛ رُبطَ شراعٌ طائرٌ بسفينة. ما الطولُ المناسبُ لحبلِ الشراعِ كي يسحبَ السفينةَ بزاوية 58°، ويكون الشراعُ على ارتفاعٍ رأسيٍّ مقداره 150 m كما هو مبينٌ في الشكل الآتي؟



- a) 177 m
- b) 283 m
- c) 160 m
- d) 244 m

أجدُ قيمة كلِّ مما يأتي:

18 $\sin 140^\circ$

19 $\cos 173^\circ$

20 $\tan 219^\circ$

21 $\sin 320^\circ$

22 $2\sin 150^\circ + \tan 135^\circ$

23 $\sin^2 150^\circ + \cos^2 150^\circ$

أجدُ حلَّ المعادلات الآتية، علمًا بأن $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ ، مُقرَّبًا إجابتي إلى أقرب عُشرٍ درجةٍ (إن لزم):

24 $3 \cos^2 x - 1 = 0$

25 $\sin x = -1.3212 \cos x$

26 $4 + 5 \sin^2 x = 9 \sin x$

27 $\tan x = 4 \sin x$

28 $3 \tan^2 x \cos x = 3 \tan^2 x$

29 إذا كانت x زاويةً في الربع الأول، وكان $\sin x + \sin (180^\circ - x) = 1.4444$ فأجدُ قياسَ الزاوية x ، مُقرَّبًا إجابتي إلى أقرب عُشرٍ درجةٍ.

30 لعبة مدفع: يُطلقُ مدفعُ قذائفَ بالوناتٍ مائيةٍ في مسابقةٍ للتسلية. إذا كان البعدُ الأفقيُّ لقذيفةٍ أُطلقتَ من المدفعِ بزاويةٍ قياسها x مع المستوى الأفقيِّ، وبسرعةٍ ابتدائيةٍ مقدارها 7 m/s، يُعطى بالأمتار حسب العلاقة:

$$d = 7 + 2 \sin\left(\frac{3x}{5}\right)$$

قذيفةٌ أُطلقتَ بزاويةٍ مقدارها 50° ؟

31 أجدُ أصفارَ الاقتران $y = 4(\sin x)^2 - 3$ ، علمًا بأن $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

تطبيقات المثلثات

Triangle Applications

ما أهمية هذه الوحدة؟

للسبب المثلثية استعمالاً كثيرةً في العلوم، والهندسة، والإلكترونيات، مثل حساب ارتفاعات قمم الجبال والمباني، وتحديد اتجاهات تحليق الطائرات على الخريطة وغيرها.

سأتعلم في هذه الوحدة:

- ◀ تفسير الاتجاه من الشمال، وإيجاده لنقطة ما بالنسبة إلى نقطة معينة.
- ◀ حلّ المثلث باستخدام قانوني الجيوب، وجيوب التمام.
- ◀ استعمال جيب الزاوية لإيجاد مساحة المثلث.
- ◀ إيجاد أطوال وزوايا مجهولة في أشكال ثلاثية الأبعاد.

تعلمت سابقاً:

- ✓ إيجاد النسب المثلثية (الجيب، جيب التمام، الظل) في الأرباع الأربعة.
- ✓ استخدام العلاقة: $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ في حلّ مسألة عن مثلث قائم الزاوية.
- ✓ نمذجة مسائل حياتية باستعمال مثلثات قائمة الزاوية، تتضمن قياسات الزوايا والأطوال لأضلاع مجهولة.

صنع جهاز بسيط لإيجاد قياسات زوايا الارتفاع والانخفاض، ثم استعماله.

فكرة المشروع

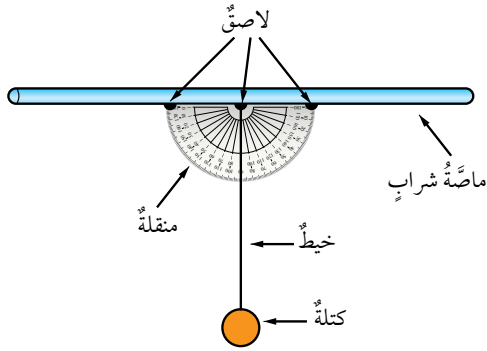


ماصّة شراب، منقلة، خيط، كتلة (مفتاح، أو ممحاة)، لاصق شفاف، شريط قياس.

المواد والأدوات



خطوات تنفيذ المشروع:



1 صنع الكلينومتر: أثبتت ماصّة الشراب على الحافة المستقيمة للمنقلة باستعمال لاصق شفاف، ثم أثبتت طرف الخيط في مركز المنقلة، وأربط بطرفه الآخر كتلة صغيرة، مثل: المفتاح، أو المشابك المعدنية؛ على أن تتدلى رأسياً إلى أسفل مثل خطّ الشاقول.

2 استعمال الكلينومتر: استعمل أنا وأفراد مجموعتي الكلينومتر لإيجاد

ارتفاع بناية أو شجرة باتباع الخطوات الآتية:

● اختار شيئاً لأقيس ارتفاعه، وليكن شجرة.

● أقف على مسافة من قاعدة الشجرة، ممسكاً بماصّة الشراب.

● أنظر من فتحة ماصّة الشراب إلى قمة الشجرة، ثم أطلب إلى زميلي / زميلتي أن يقرأ الزاوية x التي يشير إليها الخيط، ملاحظاً أن هذه الزاوية تقع بين خطّ النظر والخطّ الرأسي. وبذلك، تكون زاوية ارتفاع قمة الشجرة: $(90^\circ - x)$.

● أقيس المسافة بين المكان الذي أقف عنده وقاعدة الشجرة.

● استعمل القياسات التي دونتها لإيجاد ارتفاع الشجرة فوق مستوى عيني، باستعمال العلاقة الآتية:

$$\tan(90^\circ - x) = \frac{h}{l} \Rightarrow h = l \tan(90^\circ - x)$$

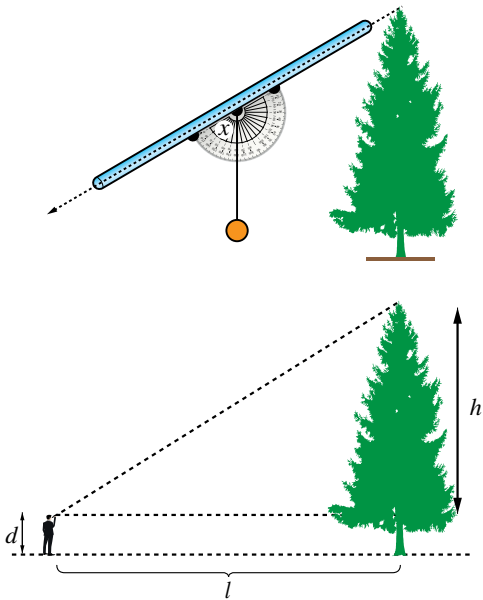
● أضيف المسافة بين الأرض ومستوى عيني إلى القيمة التي توصلت إليها لإيجاد ارتفاع الشجرة فوق سطح الأرض.

عرض النتائج:

أكتب مع أفراد مجموعتي تقريراً يتضمن ما يأتي:

● صورة لجهاز الكلينومتر المصنوع.

● صوراً لجميع الأشياء التي قيست ارتفاعاتها، وتدوين الحسابات التي تمت في أثناء القياس بجانب كل منها.



الاتجاه من الشمال Bearing

تفسيرُ الاتجاهِ منَ الشمالِ، وإيجادُه لنقطةٍ ما بالنسبةِ إلى نقطةٍ أُخرى بالرسمِ، والقياسِ، والحسابِ باستعمالِ العلاقاتِ بينَ الزوايا.

فكرةُ الدرسِ



الاتجاه من الشمال.

المصطلحات

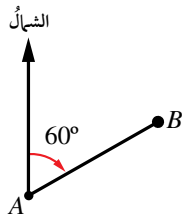


مسألة اليوم

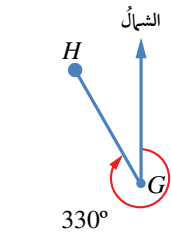


حلقت طائرة من عمان إلى العقبة، وقد صنع مسارها المستقيم زاوية قياسها 200° مع خط الشمال الجغرافي. ما قياس الزاوية بين مسار عودة الطائرة إلى عمان وخط الشمال الجغرافي؟

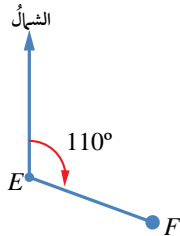
الاتجاه من الشمال (bearing) للنقطة B من النقطة A هو قياس الزاوية التي ضلع ابتدائها خط الشمال الجغرافي المرسوم من النقطة A ، وضلع انتهائها المستقيم AB ، وذلك عند قياس الزاوية في اتجاه حركة عقارب الساعة. يُكتب الاتجاه من الشمال باستعمال عدد من ثلاثة أرقام (منازل) بين 000° و 360° .



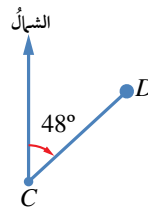
يبيّن الشكل المجاور أن الاتجاه من الشمال للنقطة B من النقطة A هو 060° .



الاتجاه من الشمال للنقطة H من النقطة G هو 330° .



الاتجاه من الشمال للنقطة F من النقطة E هو 110° .



الاتجاه من الشمال للنقطة D من النقطة C هو 048° .



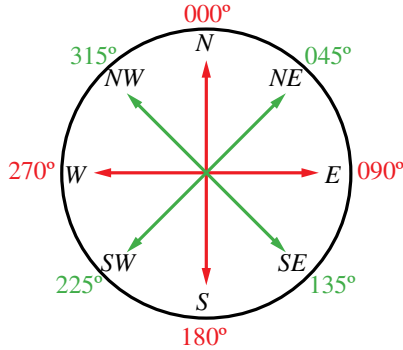
يُستخدَمُ الاتجاه من الشمال كثيراً في تحديد خطوط الملاحة البحرية والجوية.

توجد أربعة اتجاهات رئيسية يجب تذكرها دائمًا، هي:

- 1 الشمال (N)، واتجاهه من مركز البوصلة هو (000°).
- 2 الشرق (E)، واتجاهه من مركز البوصلة هو (090°).
- 3 الجنوب (S)، واتجاهه من مركز البوصلة هو (180°).
- 4 الغرب (W)، واتجاهه من مركز البوصلة هو (270°).



اعتمد الإنسان قديمًا على الشمس والقمر والنجوم في معرفة الاتجاهات، ثم أخذ يعتمد اليوم على البوصلة التي تُحدد اتجاه الشمال، ومنه تُحدد بقية الاتجاهات.

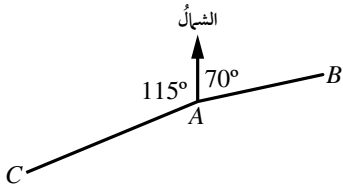


توجد أربعة اتجاهات أخرى مشهورة تقع بين الاتجاهات الأربعة الرئيسية يجب تذكرها دائمًا، هي:

- 1 الشمال الشرقي (NE)، واتجاهه من مركز البوصلة هو (045°).
- 2 الجنوب الشرقي (SE)، واتجاهه من مركز البوصلة هو (135°).
- 3 الجنوب الغربي (SW)، واتجاهه من مركز البوصلة هو (225°).
- 4 الشمال الغربي (NW)، واتجاهه من مركز البوصلة هو (315°).

مثال 1

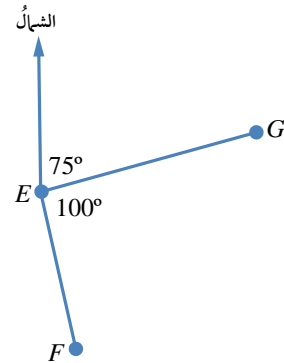
يُمثل الشكل المجاور موقع ثلاث مدن، هي: A، B، و C. أكتب اتجاه المدينة B من المدينة A، واتجاه المدينة C من المدينة A.



اتجاه المدينة B من المدينة A هو 070° ، واتجاه المدينة C من المدينة A هو $360^\circ - 115^\circ = 245^\circ$

أتحقق من فهمي

يُمثل الشكل المجاور موقع ثلاث سفن، هي: E، و F، و G. أكتب اتجاه السفينة G من السفينة E، واتجاه السفينة F من السفينة E.



أتعلم

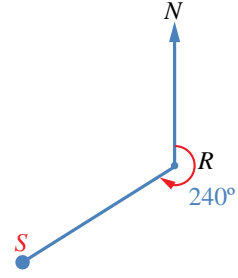
سنستعمل في بقية الدرس كلمة (اتجاه) وحدها للدلالة على الاتجاه من الشمال.

إذا عَلِمَ اتجاهُ النقطةِ S من النقطةِ R ، فيمكنُ حسابُ اتجاهِ النقطةِ R من النقطةِ S .

مثال 2

أجدُ اتجاهَ النقطةِ R من النقطةِ S في الشكلِ المجاورِ.

الطريقةُ الأولى: استعمالُ الرسمِ.



أرسمُ خطًّا رأسياً يُبينُ اتجاهَ الشمالِ الجغرافيِّ

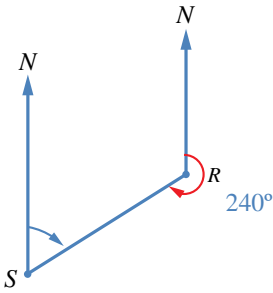
عندَ النقطةِ S ، ثمَّ أستعملُ منقلةً لأقيسَ الزاويةَ

التي رأسها S ، وضلعاها خطُّ الشمالِ (SN)

والمستقيمُ SR .

سأجدُ أنَّ قياسَ هذه الزاويةِ هو 60° ، إذن، اتجاهُ

النقطةِ R من النقطةِ S هو 060° .



الطريقةُ الثانيةُ: استعمالُ الجبرِ.

يُمكنُ إيجادُ اتجاهِ النقطةِ R من النقطةِ S باستعمالِ العلاقاتِ بينَ الزوايا.

$$m \angle NRS = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$$

مجموعُ قياسِ الزوايا حولَ نقطةٍ

هو 360°

$$m \angle NSR = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

خطًّا الشمالِ متوازيان؛ لذا،

فالزاويتان الداخليتان

NRS ، و NSR متكاملتان

أذكر

الزاويتان المتكاملتان

هُما زاويتان مجموعُ

قياسيهما 180°

أتحقق من فهمي

إذا كانَ اتجاهُ النقطةِ X من النقطةِ Z هو 295° ، فما اتجاهُ النقطةِ Z من النقطةِ X ؟



مريمُ الجيليُّ هي عالمةُ رياضياتٍ وفلكٍ مُسلمةٌ عاشت في حلب زمنَ الدولة العباسية، واخترعتِ الأسطرلابَ المُعقَّدَ؛ وهو آلةٌ فلكيةٌ مهمَّةٌ بُنيتَ عليها آليةُ عملِ أنظمةِ الملاحةِ الحديثةِ (GPS).

أرسم شكلاً يوضح كل موقف مما يأتي:

5 اتجاه النقطة B من النقطة W هو 310° .

4 اتجاه النقطة C من النقطة H هو 170° .

أرسم شكلاً لحل المسائل الآتية:

6 اتجاه A من B هو 070° . أجد اتجاه B من A .

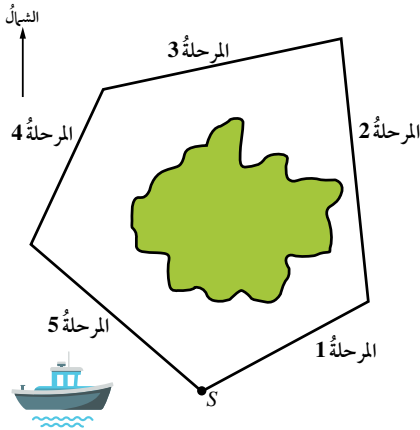
8 تقع النقطة A شمالي النقطة C ، وتقع النقطة B شرقي النقطة A ، واتجاه النقطة B من النقطة C هو 045° . أرسم شكلاً يُبين مواقع النقاط الثلاث.

ملاحظة بحرية: أبحر قارب حول الأضلاع الأربعة لمربع مساحته كيلو متر مربع واحد:

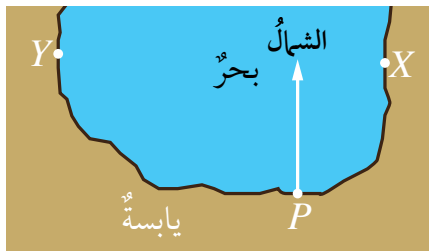
9 إذا بدأ الإبحار في اتجاه الشمال، فما الاتجاهات الثلاثة التالية التي سلكها حتى أكمل رحلته حول المربع باتجاه حركة عقارب الساعة؟

10 إذا بدأ الإبحار في اتجاه 090° ، فما الاتجاهات الثلاثة التالية التي سلكها حتى أكمل رحلته حول المربع بعكس اتجاه حركة عقارب الساعة؟

11 خرائط: تُبين الخريطة الآتية رحلة قارب حول إحدى الجزر، بدأت من الموقع S ، وانتهت عنده. إذا كان كل 1 cm على الخريطة يُمثل 20 km ، فما طول كل مرحلة من مراحل الرحلة واتجاهها؟ أنسخ الجدول الآتي، ثم أكمله:



المرحلة	المسافة الحقيقية	الاتجاه
1		
2		
3		
4		
5		



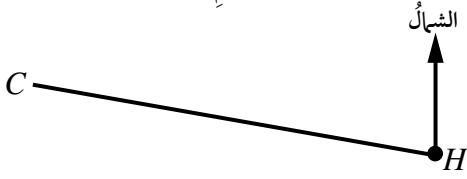
موانئ: يُبين المخطط المجاور الميناء P والمرفأين X و Y على الساحل:

12 أبحر قارب صيد من الميناء P إلى المرفأ X . ما اتجاه المرفأ X من الميناء P ؟

13 أبحر يخت من الميناء P إلى المرفأ Y . ما اتجاه المرفأ Y من الميناء P ؟

مواقع جغرافية: يُبين المخطط المجاور موقع بيت أريج عند النقطة H والنادي الرياضي الذي ترتأده عند النقطة C :

مقياس الرسم: كل 1 cm يُمثل 200 m

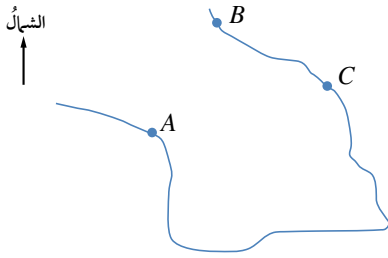


14 أستخدم مقياس الرسم المعطى لإيجاد المسافة الحقيقية بين بيت أريج والنادي الرياضي.

15 أستخدم منقلة لإيجاد اتجاه النادي من بيت أريج.

16 يبعد السوق التجاري S مسافة 600 m عن بيت أريج، وباتجاه 150° من بيتها. أعيّن موقع السوق التجاري S على نسخة من المخطط.

17 ملاحظة جوية: في أثناء تحليق طائرة باتجاه 072° ، طُلب إلى قائدها التوجه إلى مطار صوب الجنوب. ما الزاوية التي سيستدير بها؟



18 خرائط: تُمثل A و B و C ثلاث قرى تقع على رؤوس مربع في خليج ما. إذا كان اتجاه القرية B من القرية A هو 030° ، فما اتجاه القرية A من القرية C ؟

19 أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

مهارات التفكير العليا



20 مسألة مفتوحة: أرسم مثلثًا ذا قاعدة أفقية أسميه ABC ، ثم أقيس زواياه، ثم أجد اتجاه A من B ، واتجاه C من A ، واتجاه C من B .

تحذّر: أبحرت سفينة من الميناء P مسافة 57 km باتجاه الشمال، ثم تحوّلت إلى اتجاه 045° ، وقطعت مسافة 38 km. إذا كان موقع السفينة الحالي هو S ، فأجد:

21 SP .

22 اتجاه موقع السفينة من الميناء P .

قانونُ الجيوبِ Law of Sines

استعمالُ قانونِ الجيوبِ لإيجادِ طولِ ضلعٍ، أو قياسِ زاويةٍ في مثلثٍ، عُلِمَ فيه ضلعانِ وزاويةٌ مقابلةٌ لأحدهما، أو زاويتانِ وضلعٌ.

فكرةُ الدرسِ



حلُّ المثلثِ، قانونُ الجيوبِ.

المصطلحاتُ

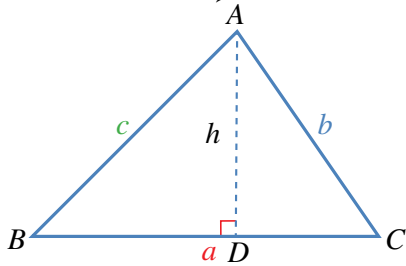


مسألةُ اليومِ



إذا كانتَ جرشُ والزرقاءُ ومأدبا تُشكِّلُ رؤوسَ مثلثٍ على الخريطةِ، والمسافةُ بينَ مدينتي الزرقاءِ وجرشٍ 44 km، وقياسُ الزاويةِ التي تقعُ عندَ رأسها مدينةُ جرشٍ 52° ، وقياسُ الزاويةِ التي تقعُ عندَ رأسها مدينةُ الزرقاءِ 93° ، فهل يُمكنُ بهذهِ المعلوماتِ حسابُ المسافةِ بينَ مدينتي جرشٍ ومأدبا؟

يوجدُ في أيِّ مثلثٍ ستةُ قياساتٍ، هي: ثلاثةُ أضلاعٍ، وثلاثُ زوايا. وإيجادُ هذهِ القياساتِ يُعرفُ باسمِ **حلِّ المثلثِ** (solving a triangle)؛ إذ تساعدُ قياساتُ الزوايا على حلِّ المثلثاتِ في حالِ كانتَ بعضُ قياساتها معروفةً، وذلك باستعمالِ نسبةِ الجيبِ لإيجادِ علاقاتٍ بينَ أطوالِ الأضلاعِ.



ففي المثلثِ ABC المرسومِ جانبًا، يُمثَّلُ h الارتفاعُ منَ النقطةِ A ؛ لذا فهو عموديٌّ على القاعدةِ \overline{BC} .

يُمكنُ الاستفادةُ منَ تعريفِ الجيبِ في استنتاجِ بعضِ العلاقاتِ كما يأتي:

$$\sin B = \frac{h}{c}$$

تعريفُ الجيبِ

$$h = c \sin B$$

بالضربِ التبادليِّ

$$\sin C = \frac{h}{b}$$

تعريفُ الجيبِ

$$h = b \sin C$$

بالضربِ التبادليِّ

$$c \sin B = b \sin C$$

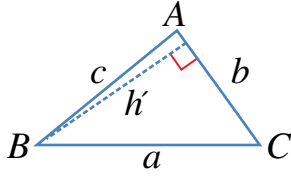
بالمساواةِ $h = h$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$$

بقسمةِ الطرفينِ على $\sin B$ ، ثمَّ على $\sin C$

رموزُ رياضيةُ

تشيرُ الأحرفُ الكبيرةُ A, B, C إلى رؤوسِ المثلثِ وزواياه، في حين تشيرُ الصغيرةُ منها إلى أطوالِ الأضلاعِ. فمثلًا، طولُ الضلعِ المقابلِ للزاويةِ A يشارُ إليه بالحرفِ a ، وهكذا.



وبالمثل، يُمكنُ استنتاجُ العلاقاتِ الآتيتين عند رسم ارتفاع المثلث من النقطة B بشكلٍ عموديٍّ على AC ، أو رسم ارتفاعه من النقطة C عموديًّا على AB .

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

عند دمج هذه العلاقات الثلاث معًا، ينتج قانون الجيوب (law of sines).

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

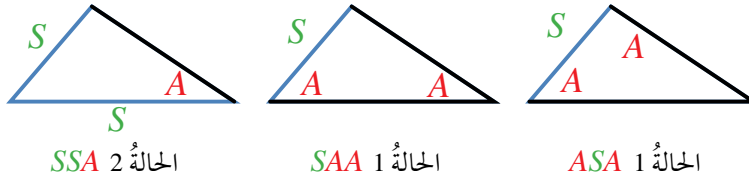
يُستعمل قانون الجيوب لحل المثلث الذي عُلمت ثلاثة من قياساته، وذلك في الحالتين الآتيتين:

أفكر

لماذا يتعدَّد حلُّ المثلث الذي عُلمت فقط قياسات زواياه جميعًا؟

- 1 ضلعٌ واحدٌ وزاويتان (ASA ، أو SAA).
- 2 ضلعان وزاويةٌ مقابلةٌ لأحدهما (SSA).

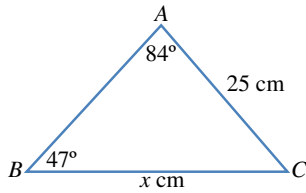
يُبين الشكل الآتي هاتين الحالتين:



الحالة 2 SSA

الحالة 1 SAA

الحالة 1 ASA



$$\frac{x}{\sin 84^\circ} = \frac{25}{\sin 47^\circ}$$

$$x = \frac{25 \sin 84^\circ}{\sin 47^\circ}$$

$$\approx 34 \text{ cm}$$

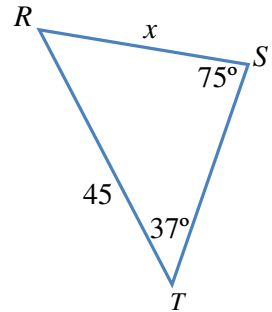
قانون الجيوب

بضرب الطرفين في $\sin 84^\circ$

باستعمال الآلة الحاسبة

أتحقق من فهمي

أجد قيمة x في المثلث RST المُبين جانبًا.



إرشاد

توجد صيغةٌ أخرى لقانون الجيوب هي:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

إرشاد

- الحرف S هو اختصار لكلمة Side، وتعني الضلع.
- الحرف A هو اختصار لكلمة Angle، وتعني الزاوية.

مثال 1

أجد قيمة x في المثلث ABC .

يُمكنُ أيضًا استعمالُ قانونِ الجيوبِ لإيجادِ قياسِ زاويةٍ مجهولةٍ في المثلثِ.

مثال 2

أجدُ قيمةَ x في المثلثِ ABC .

قانونُ الجيوبِ

بضربِ الطرفينِ في 7

$$\frac{\sin x}{7} = \frac{\sin 40^\circ}{6}$$

$$\sin x = \frac{7 \sin 40^\circ}{6}$$

$$\approx 0.7499$$

$$x = \sin^{-1}(0.7499)$$

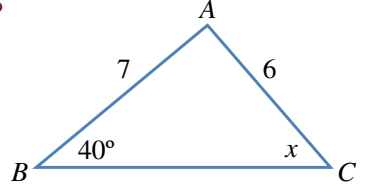
$$\approx 48.6^\circ$$

معكوسُ الجيبِ

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

أتتحقق من فهمي

أجدُ قيمةَ x في المثلثِ RST .



أتعلم

توجدُ قيمتان

لـ $\sin^{-1} 0.7499$ ضمنَ

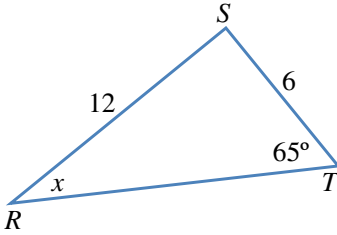
الدورة الواحدة هُما

48.6° و 131.4° ، نختارُ

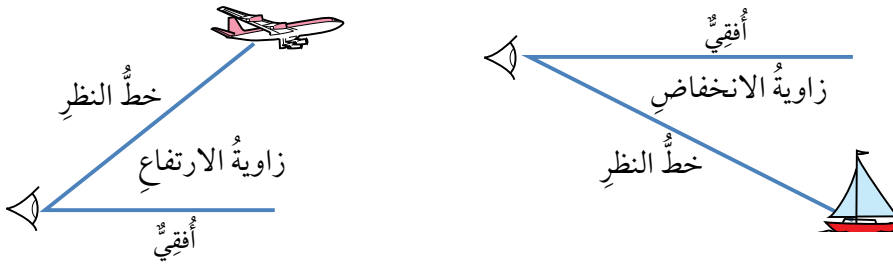
منهُما القيمةَ 48.6° ؛ لأنَّ

الزاويةَ x تبدو حادَّةً في

الشكلِ المُعطى.

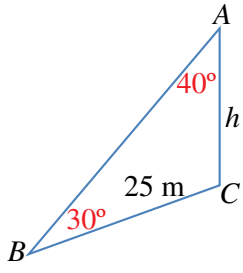


عندما أنظرُ إلى طائرةٍ في السماء، فإنَّ الزاويةَ المحصورةَ بينَ الخطِّ الواصلِ بينَ عيني والطائرةِ وخطِّ نظري أفقيًّا تُسمَّى زاويةَ الارتفاعِ. وإذا وقفتُ على تلةٍ ساحليةٍ، ثمَّ نظرتُ إلى قاربٍ أسفلَ مني، فإنَّ الزاويةَ المحصورةَ بينَ الخطِّ الواصلِ بينَ عيني والقاربِ وخطِّ نظري أفقيًّا تُسمَّى زاويةَ الانخفاضِ. ولهاتينِ الزاويتينِ أهميةٌ كبيرةٌ عندَ حلِّ المسائلِ الحياتيةِ باستعمالِ النسبِ المثلثيةِ.



مثال 3: من الحياة

يقعُ برجٌ ارتفاعُهُ h مترٌ على تلةٍ، وقد رُصدتُ قمةُ البرجِ A منَ النقطةِ B التي تبعدُ عنَ قاعدةِ البرجِ 25 m فكانَ قياسُ زاويةِ ارتفاعِها 50° ، ثمَّ رُصدتُ قمةُ التلةِ منَ النقطةِ B بنفسها بزاويةِ ارتفاعٍ مقدارُها 20° . ما ارتفاعُ البرجِ h ؟



أجدُ أولاً قياسَ الزاوية ABC :

$$m\angle ABC = 50^\circ - 20^\circ = 30^\circ$$

ثمَّ أجدُ قياسَ الزاوية BAD :

$$m\angle BAC = 180^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$$

ارتفاعُ البرجِ هو طولُ الضلعِ AC في المثلثِ BAC . أستعملُ قانونَ الجيوبِ لحلَّ هذا المثلثِ.

$$\frac{h}{\sin 30^\circ} = \frac{25}{\sin 40^\circ}$$

قانونُ الجيوبِ

$$h = \frac{25 \sin 30^\circ}{\sin 40^\circ}$$

بضربِ الطرفينِ في $\sin 30^\circ$

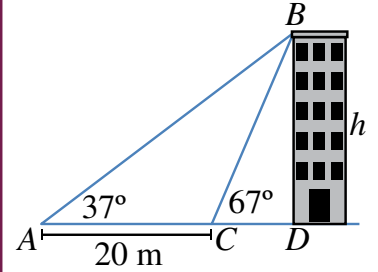
$$h \approx 19.45 \text{ m}$$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

إذن، ارتفاعُ البرجِ هو: 19.45 m

أنتحق من فهمي

رصدَ ليثُ زاويةَ قَمَّةِ بنايةٍ من النقطةِ A ، فكانتُ 37° ، ثمَّ سارَ مسافةً 20 m باتجاهِ البنايةِ حتى النقطةِ C ، ثمَّ رصدَ زاويةَ قَمَّةِ البنايةِ بزاويةٍ ارتفاعٍ مقدارُها 67° . أجدُ ارتفاعَ البنايةِ.



مثال 4: من الحياة

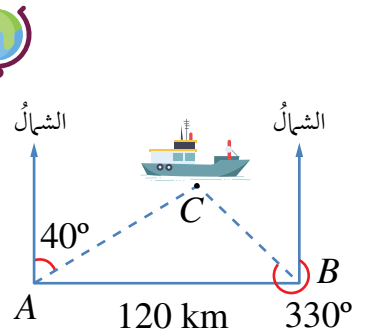
التقطتُ محطّتا خفرِ السواحلِ A و B نداءً استغاثةً من سفينةٍ عند النقطةِ C في البحرِ، وقد حدّدتِ المحطّةُ A اتجاهَ السفينةِ عند 040° ، وحدّدتِ المحطّةُ B اتجاهَ السفينةِ عند 330° . إذا كانتِ B شرقيّ A وكانتِ المسافةُ بينَ المحطّتينِ 120 km، فكم تبعدُ السفينةُ عن المحطّةِ A ؟

يجبُ أولاً إيجادُ قياسِ الزاويةِ C :

قياسُ الزاويةِ BAC هو 50° (لأنّها مُتممّةٌ للزاويةِ التي قياسُها 40°).

وقياسُ الزاويةِ ABC هو 60° (لأنَّ $60^\circ = 330^\circ - 270^\circ$). إذن:

$$m\angle ACB = 180^\circ - 60^\circ - 50^\circ = 70^\circ$$



ثمَّ استعمالُ قانونِ الجيوبِ:

قانونُ الجيوبِ

بالتعويضِ

بضربِ الطرفينِ في $\sin 60^\circ$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$
$$\frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{120}{\sin 70^\circ}$$
$$b = \frac{120 \times \sin 60^\circ}{\sin 70^\circ}$$
$$\approx 110.59 \text{ km}$$

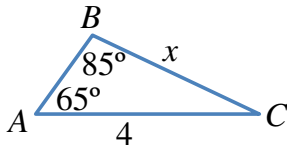
أتحقق من فهمي 

أجدُ بُعدَ السفينةِ عن المحطَّةِ B في المثالِ السابقِ.

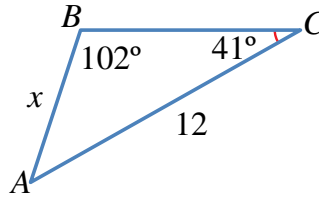
أُتدرب وأحل المسائل 

أجدُ قيمةَ x في كلِّ من المثلثاتِ الآتية:

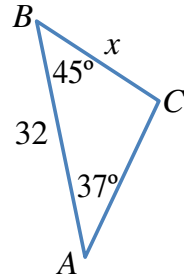
1



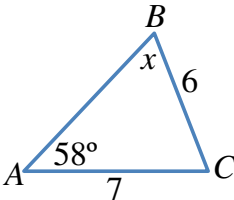
2



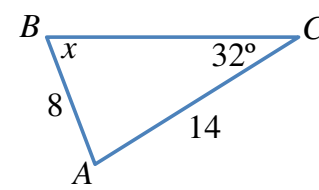
3



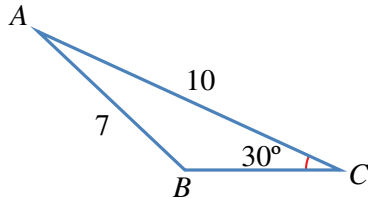
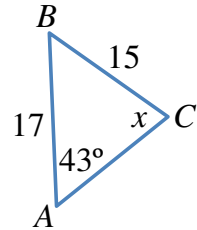
4



5

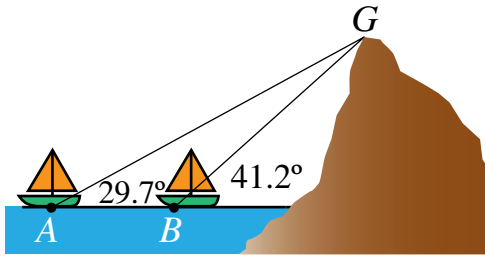


6

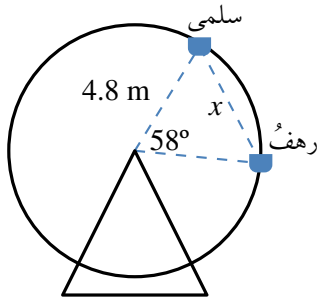


7 أجدُ قياسَ الزاويةِ المنفرجةِ CBA في الشكلِ المجاورِ.

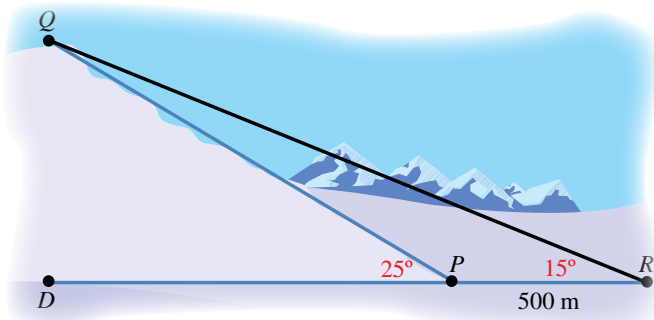
8 خرائطُ: أحلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.



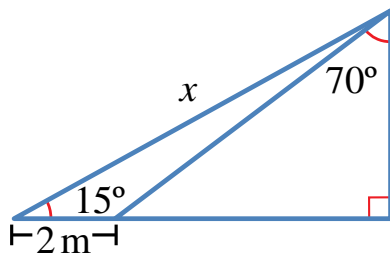
- 9 **بحار:** ترصد سفينتان في البحر قمة جبل كما في الشكل المجاور. إذا كانت المسافة بين السفينتين 1473 m، فما ارتفاع الجبل من مستوى سطح البحر؟



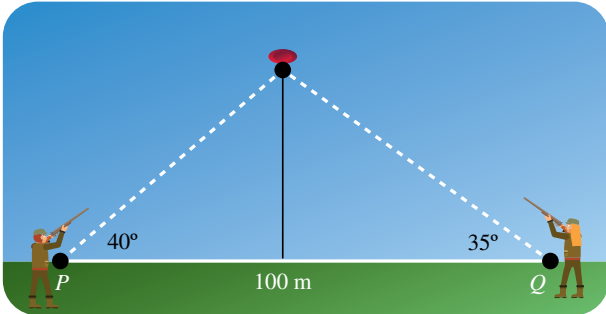
- 10 **مدينة الألعاب:** في مدينة الألعاب، جلست سلمى ورهف على مقعدين منفصلين في لعبة الدولاب الدوار كما في الشكل المجاور. أجد المسافة x بينهما.



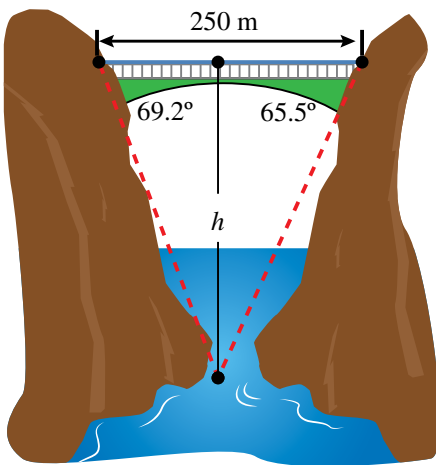
- 11 **رياضة التزلج:** يتكوّن مسار تزلج من جزءٍ مائلٍ، وآخر مستقيم. إذا تزلج محمود من النقطة Q إلى النقطة P ، ثم وصل خط النهاية عند النقطة R ، وكانت زاوية ارتفاع مسار التزلج عن الأرض 25° ، والمسافة بين النقطتين P و R هي 500 m، وزاوية رصيد الحكّم من نقطة النهاية للمتزلج الذي يقف عند نقطة البداية 15° ، فما طول QP ؟



- 12 أجد قيمة x في الشكل المجاور، مُقرَّبًا إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة.

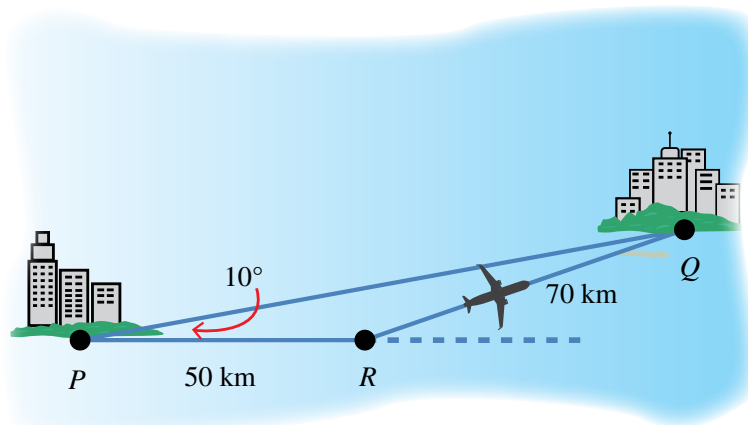


13 **تبرير:** أطلق قناص وقناصة النار على هدفٍ متحركٍ في السماء في لحظةٍ ما. إذا كانت زاوية إطلاق القناص 40° ، وزاوية إطلاق القناصة 35° ، والمسافة بينهما 100 m ، فأيهما سيصيب الهدف أولاً؟ أبرر إجابتي.



14 **تحذ:** مرّ قاربٌ أسفل جسرٍ طوله 250 m . وقد رصد الشخص الذي في القارب الزاويتين اللتين تقعان عند طرفي الجسر، فكانتا 69.2° و 65.5° ، أجد ارتفاع الجسر عن القارب.

15 **تبرير:** توجهت طائرة من المدينة P إلى المدينة Q ، وبعد أن قطعت مسافة 50 km أدرك الطيار وجود خطأ في زاوية الانطلاق مقداره 10° ، فاستدار في الحال، وقطعت الطائرة مسافة 70 km حتى وصلت المدينة Q . إذا كانت سرعة الطائرة ثابتة وتساوي 250 km/h ، فما الوقت الإضافي الذي استغرقه الطيار بسبب خطئه في زاوية الانطلاق؟



قانونُ جُيوبِ التمامِ Law of Cosines

استعمالُ قانونِ جُيوبِ التمامِ لإيجادِ طولِ ضلعٍ، أو قياسِ زاويةٍ في مثلثٍ.
قانونُ جُيوبِ التمامِ.

فكرةُ الدرس



المصطلحات



مسألةُ اليوم

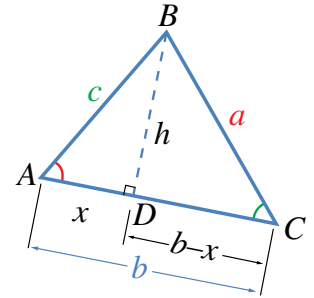


انطلقت حافلتان من محطة واحدة في الوقت نفسه، وقد اتجهت الأولى شرقاً بسرعة 60 km/h، وانطلقت الثانية في مسار يصنع زاوية 30° مع مسار الحافلة الأولى بسرعة 50 km/h. هل يمكن حساب المسافة بين الحافلتين بعد مضي 3 ساعات على انطلاقهما؟

تعرفت في الدرس السابق قانون الجيوب، وكيف يُستعمل لحلّ مثلثاتٍ عَلِمَ فيها ضلعٌ واحدٌ وزاويتان (ASA، أو SAA)، أو ضلعانٍ وزاويةٌ مقابلةٌ لأحدهما (SSA).

تُستعمل أيضاً نسبةُ جيبِ التمامِ لإيجادِ علاقاتٍ أخرى بين أطوالِ الأضلاعِ وقياساتِ الزوايا؛ ما يساعد على حلّ بعض المثلثات التي لا يمكن حلّها باستعمالِ قانونِ الجيوبِ.

ففي الشكل المجاور، يُمثّل الارتفاع المرسوم من B عمودياً على AC . وباستعمالِ نظرية فيثاغورس وتعريفِ جيبِ التمامِ، يمكنُ استنتاجِ بعضِ العلاقاتِ على النحو الآتي:



$$h^2 = c^2 - x^2 \quad \text{باستعمالِ نظرية فيثاغورس في المثلثِ } ADB$$

$$h^2 = a^2 - (b-x)^2 \quad \text{باستعمالِ نظرية فيثاغورس في المثلثِ } BDC$$

$$c^2 - x^2 = a^2 - (b-x)^2 \quad \text{بمساواةِ المعادلتينِ } h^2 = h^2$$

$$c^2 - x^2 = a^2 - b^2 + 2xb - x^2 \quad \text{بفكِّ القوسِ}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2xb \quad \text{بالتبسيطِ}$$

لإدخالِ جيبِ التمامِ في المعادلة: $a^2 = b^2 + c^2 - 2xb$ ، فإننا نكتبُ x بدلالةِ $\cos A$:

$$\cos A = \frac{x}{c} \quad \text{تعريفُ جيبِ التمامِ}$$

$$x = c \times \cos A \quad \text{بالضربِ التبادليِّ}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \text{بتعويضِ قيمةِ } x \text{ في المعادلةِ}$$

وبذلك، نتوصل إلى العلاقة الآتية بين أطوال أضلاع المثلث وقياسات زواياه باستعمال جيب التمام:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

وبطريقة مشابهة، يُمكن التوصل إلى العلاقتين الآتيتين:

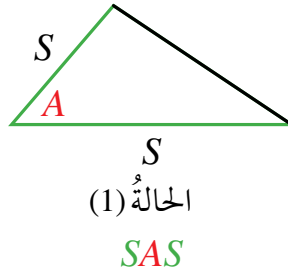
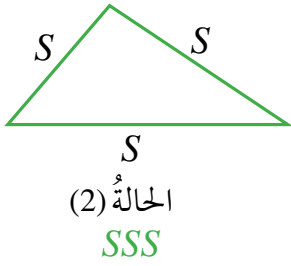
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

تُسمى هذه العلاقات الثلاث **قانون جيب التمام (Law of Cosines)**، ويُستعمل هذا القانون لحل أيّ مثلث عُلِمَت ثلاثة من قياساته في الحالتين الآتيتين:

1 ضلعان وزاوية محصورة بينهما (SAS).

2 ثلاثة أضلاع (SSS).



أَتَعَلَّم

يُمكن كتابة قانون جيب التمام كما يأتي:

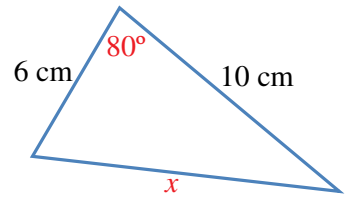
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

مثال 1

أجد قيمة x في المثلث المجاور.



$$x^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \cos 80^\circ$$

$$x^2 = 115.16$$

$$x = \pm \sqrt{115.16}$$

$$x = \pm 10.7 \text{ cm}$$

قانون جيب التمام

باستعمال الآلة الحاسبة

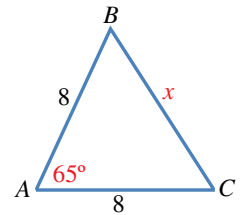
بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن، $x = 10.7$ ؛ لأن قيمة x لا يمكن أن تكون سالبة.

أتحقق من فهمي

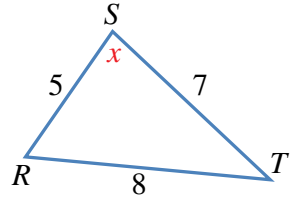
أجد قيمة x في المثلث المجاور.



يُستعمل قانون جيب التمام أيضًا لإيجاد قياس زاوية مجهولة في المثلث.

مثال 2

أجد قيمة x في المثلث RST المجاور.



قانون جيب التمام

بكتابة $\cos x$ موضوع القانون

باستعمال الآلة الحاسبة

معكوس جيب التمام

أنتحَق من فهمي

$$8^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \times 5 \times 7 \cos x$$

$$\cos x = \frac{5^2 + 7^2 - 8^2}{2 \times 5 \times 7}$$

$$\cos x = 0.1428$$

$$x = 81.8^\circ$$

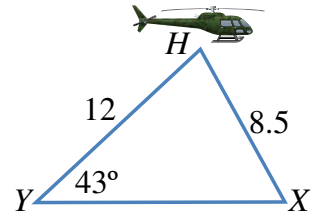
في المثلث ABC ، إذا كان $AB = 16$ ، $BC = 12$ ، $AC = 20$ فأثبت أن الزاوية B قائمة.

قد نحتاج في بعض المسائل إلى استعمال قانوني الجيوب و جيب التمام معاً لإيجاد القياسات المطلوبة.

مثال 3: من الحياة



شوهدت طائرة مروحية تحلق في السماء من القريتين X و Y في اللحظة نفسها. إذا كان بُعد الطائرة عن القرية X هو 8.5 km ، وعن القرية Y هو 12 km ، وكانت القريتان في مستوى أفقي واحد، وزاوية ارتفاع الطائرة من القرية Y هي 43° ، كما هو مبين في الشكل المجاور، فما المسافة بين هاتين القريتين؟



لإيجاد المسافة بين القريتين، يجب معرفة قياس الزاوية بين الضلعين اللذين يمثلان بُعدي الطائرة عن القريتين كما يأتي:

الخطوة 1: استعمال قانون الجيوب لإيجاد قياس الزاوية X في المثلث HYX .

$$\frac{\sin 43^\circ}{8.5} = \frac{\sin X}{12}$$

$$\sin X = \frac{12 \sin 43^\circ}{8.5}$$

$$\sin X \approx 0.963$$

$$X = \sin^{-1} 0.963$$

$$\approx 74.3^\circ$$

قانون الجيوب

بضرب الطرفين في 12

باستعمال الآلة الحاسبة

معكوس \sin

باستعمال الآلة الحاسبة

الخطوة 2: إيجاد قياس الزاوية H .

أتعلم

توجد قيمتان لـ $\sin^{-1} 0.963$ ضمن الدورة الواحدة هما 74.3° و 105.6° ، نختار منهما القيمة 74.3° ؛ لأن الزاوية x تبدو حادة في الشكل المعطى.

$$m\angle H = 180^\circ - 43^\circ - 74.3^\circ = 62.7^\circ$$

مجموع قياس زوايا المثلث 180°

الخطوة 3: استعمال قانون جيب التمام لإيجاد المسافة بين القريتين.

$$(XY)^2 = 12^2 + 8.5^2 - 2(12)(8.5)\cos 62.7^\circ$$

قانون جيب التمام

$$(XY)^2 = 122.7$$

باستعمال الآلة الحاسبة

$$XY = \pm \sqrt{122.7} = \pm 11.1$$

بحساب الجذر التربيعي للطرفين

إذن، المسافة بين المدينتين 11.1 km تقريبًا.

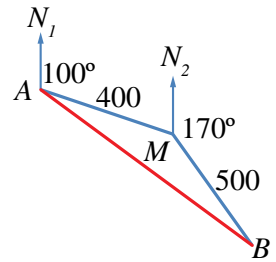
أتحقق من فهمي

سفن: أبحرت سفينة من الميناء A باتجاه الشمال، فقطعت مسافة 240 km، ثم انحرفت بزاوية 50° ، وقطعت مسافة 160 km حتى وصلت إلى الميناء B. ما المسافة بين الميناء A والميناء B؟

مثال 4: من الحياة



أقلعت طائرة بزاوية 100° عن الشمال من المدينة A، فقطعت مسافة 400 km، ثم انعطفت يمينًا، فأصبحت الزاوية بين خط مسارها الجديد والشمال 170° ، ثم قطعت مسافة 500 km لتصل إلى المدينة B. ما المسافة بين هاتين المدينتين؟



يُمكن حساب المسافة بين المدينتين (طول القطعة المستقيمة AB) بإيجاد قياس الزاوية AMB . من الملاحظ أن الزاوية AMN_2 مكملّة للزاوية MAN_1 ، وهي تساوي 80° .

$$m\angle AMB = 360^\circ - (80^\circ + 170^\circ) = 110^\circ$$

مجموع الزوايا حول نقطة

$$(AB)^2 = (400)^2 + (500)^2 - 2 \times 400 \times 500 \cos 110^\circ$$

قانون جيب التمام

$$(AB)^2 = 546808.0573$$

باستعمال الآلة الحاسبة

$$AB = \sqrt{546808.0573} \approx 739.5$$

بأخذ الجذر التربيعي

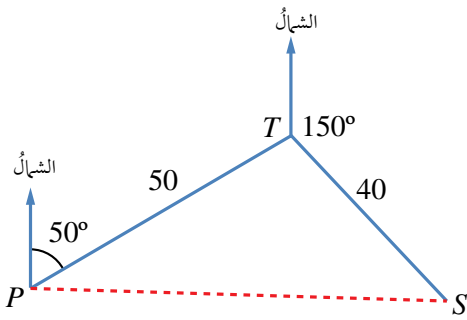
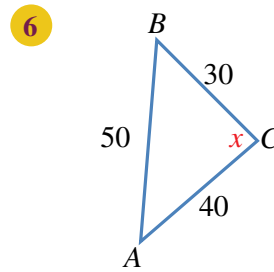
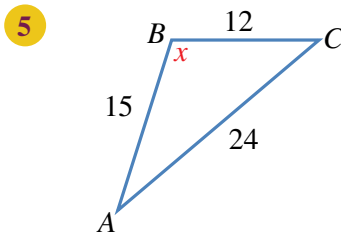
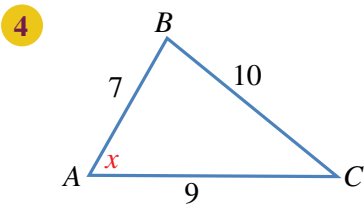
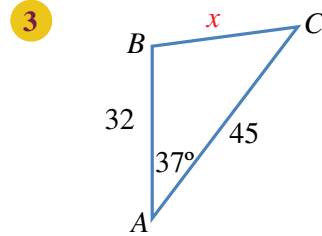
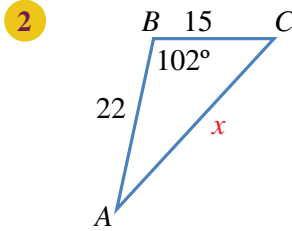
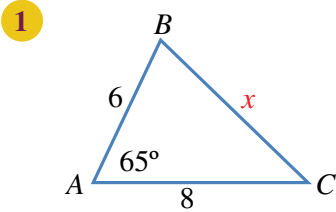
إذن، المسافة بين المدينتين 739.5 km تقريبًا.

أتحقق من فهمي

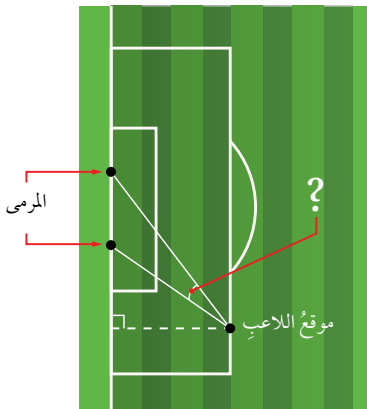
سار قطار من المحطة A في اتجاه 080° إلى المحطة B التي تبعد عنها 120 km، ثم تحوّل إلى اتجاه 070° ، وسار مسافة 90 km إلى المحطة C. ما المسافة بين المحطة A والمحطة C؟



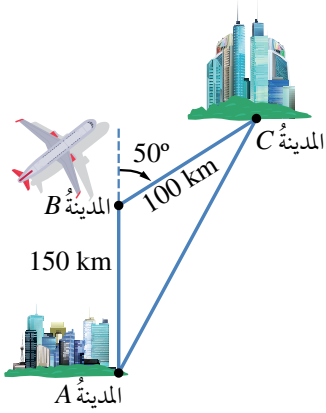
أجد قيمة x في كل من المثلثات الآتية:



7 **ملاححة جوية:** أبحرت سفينة من أحد الموانئ مسافة 50 km في اتجاه 050° ، ثم غير القبطان خط سيرها إلى اتجاه 150° وقطعت مسافة 40 km، ثم توقفت بسبب إصابة أحد أفراد الطاقم. ما المسافة التي ستقطعها مروحية الإنقاذ من الميناء لتصل إلى السفينة في أقصر وقت ممكن؟

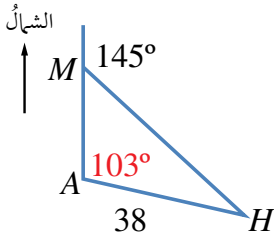


8 **كرة قدم:** يُبين الشكل المجاور موقع لاعب كرة قدم يركل الكرة نحو مرعى عرضه 5 m. أجد قياس الزاوية التي يستطيع منها اللاعب أن يركل الكرة لتسديد هدف، علمًا بأنه يبعد عن طرفي المرمى مسافة 26 m و 23 m.



- 9 **خرائطُ طيرانٍ:** أفلَعَتْ طائِرَةٌ مِنَ المَدِينَةِ A فِي اتِّجَاهِ 000° مَسَافَةَ 150 km ، ثُمَّ اتَّجَهَتْ إِلَى 050° ، وَسَارَتْ مَسَافَةَ 100 km حَتَّى وَصَلَتْ المَدِينَةَ C كَمَا فِي الشَّكْلِ المَجَاوِرِ. مَا أَقْصَرُ مَسَافَةٍ مُمْكِنَةٍ بَيْنَ المَدِينَتَيْنِ إِذَا كَانَ مَسْمُوحًا لِلطَّائِرَةِ اتِّخَاذُ المَسَارِ الَّذِي تَرِيدُ؟

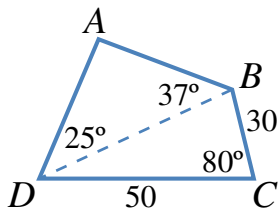
- 10 **ساعاتُ:** طُولُ عَقْرِيَّيْ سَاعَةٍ 3 cm ، وَ 4 cm . أَجِدُ المَسَافَةَ بَيْنَ رَأْسِي العَقْرِيَّيْنِ عِنْدَمَا يَشِيرَانِ إِلَى السَّاعَةِ 4 تَمَامًا.



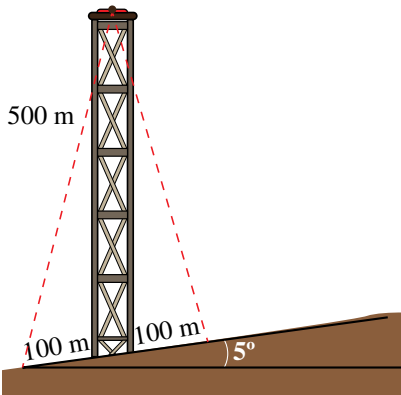
- 11 **مروحيةُ إنقاذٍ:** أُرْسِلَتْ مروحيةُ إنقاذٍ مِنَ القَاعَةِ A لِإِسْعَافِ رَجُلٍ عَلَى جَبَلٍ عِنْدَ النُّقْطَةِ M إِلَى الشَّمَالِ مِنْ هَذِهِ القَاعَةِ، ثُمَّ أَوْصَلَتْهُ إِلَى المَسْتَشْفَى H الَّذِي يَبْعُدُ عَنِ القَاعَةِ مَسَافَةَ 38 km كَمَا يَظْهَرُ فِي الشَّكْلِ المَجَاوِرِ. أَجِدُ المَسَافَةَ مِنَ الجَبَلِ إِلَى المَسْتَشْفَى بِطَرِيقَتَيْنِ.

مهارات التفكير العليا

- 12 **تحَدُّ:** أَجِدْ قِيَاسَ أَصْغَرِ زَاوِيَةٍ فِي مِثْلِ أَطْوَالٍ أَضْلَاعِهِ $3a, 5a, 7a$ ، حَيْثُ a عَدَدٌ حَقِيقِيٌّ مُوجِبٌ.



- 13 **تحَدُّ:** يُمَثِّلُ الشَّكْلُ $ABCD$ المَجَاوِرُ حَقْلَ نَخِيلٍ تَرِيدُ مَالِكْتَهُ إِحَاطَتَهُ بِسِيَاحٍ. أَجِدْ طُولَ السِّيَاحِ.



- 14 **تحَدُّ:** يَرْتَفِعُ بَرْجٌ 500 m عَلَى تَلَّةٍ تَمِيلُ بِزَاوِيَةِ 5° عَنِ المَسْتَوَى الأفْقِيِّ كَمَا فِي الشَّكْلِ المَجَاوِرِ. أَرَادَتِ المَهَنْدِسَةُ صَفَاءً تَثْبِيتَ البَرْجِ بِسَلْكَيْنِ مِنْ قَمَّتِهِ إِلَى نَقْطَتَيْنِ عَلَى الأَرْضِ، تَبْعُدُ كُلُّ مَنَّهُمَا مَسَافَةَ 100 m عَنِ قَاعَةِ البَرْجِ. أَجِدْ طُولَ السَلْكَيْنِ.

استعمال جيب الزاوية لإيجاد مساحة المثلث Using Sine to Find the Area of a Triangle

إيجاد مساحة مثلث عليم فيه طولاً ضلعين، وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

فكرة الدرس



مسألة اليوم



لدى مزارع قطعة أرضٍ مثلثة الشكل، طول أحد أضلاعها 84 m، وطول ضلعٍ آخر 110 m، وقياس الزاوية المحصورة بينهما 145° ، وقد أراد زراعتها بالبطاطا، فلزمه 0.15 kg من درنات البطاطا لكل متر مربع. كيف يستطيع المزارع حساب كمية درنات البطاطا اللازمة لزراعة أرضه؟

تعلمت سابقاً كيفية حساب مساحة المثلث بضرب نصف طول قاعدته في ارتفاعه، غير أنه يتعدّد استعمال هذه الطريقة إذا كان الارتفاع مجهولاً؛ لذا يمكن استخدام النسب المثلثية في إيجاد قانونٍ آخر لحساب مساحة المثلث باستعمال أطوال أضلاعه وقياسات زواياه. ففي الشكل المجاور، نلاحظ أن BD هو ارتفاع المثلث ABC ، وأنه عمودي على القاعدة AC . فإذا كان $AC = b$ ، و $BD = h$ ، فإن مساحة هذا المثلث هي:

$$K = \frac{1}{2} AC \times BD \\ = \frac{1}{2} bh$$

نلاحظ أيضاً من المثلث BDC ما يأتي:

$$\sin C = \frac{h}{a}$$

تعريف جيب الزاوية

$$h = a \sin C$$

بضرب طرفي المعادلة في a

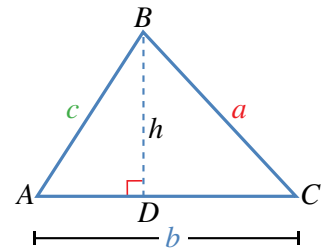
$$K = \frac{1}{2} b (a \sin C)$$

بالتعويض عن h في قانون مساحة المثلث بـ $a \sin C$

$$= \frac{1}{2} ab \sin C$$

يمكن رسم العمود من الرأس A إلى الضلع الذي يقابله BC ، ومن الرأس C إلى الضلع الذي يقابله AB ، لبيان أن مساحة هذا المثلث تساوي $\frac{1}{2} ac \sin B$ ، وأنها تساوي أيضاً

$$\frac{1}{2} bc \sin A$$



مساحة المثلث

مفهوم أساسي

مساحة المثلث تساوي نصف ناتج ضرب طولَي أيّ ضلعين فيه مضروباً في جيب الزاوية المحصورة بينهما:

$$K = \frac{1}{2} bc \sin A \quad K = \frac{1}{2} ac \sin B \quad K = \frac{1}{2} ab \sin C$$

مثال 1

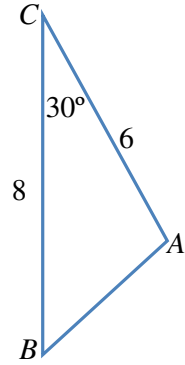
أجد مساحة المثلث ABC بالوحدات المربعة في الشكل المجاور.

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} ab \sin C \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \sin 30^\circ \\ &= 12 \end{aligned}$$

قانون مساحة المثلث

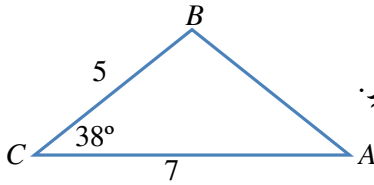
بالتعويض

إذن، مساحة المثلث 12 وحدة مربعة.



أتحقق من فهمي

أجد مساحة المثلث بالوحدات المربعة في الشكل المجاور.



تعلمت في المثال السابق كيف أجد مساحة مثلث عُلِمَ فيه طولاً ضلعين، وقياس الزاوية المحصورة بينهما، وسأعلم الآن كيفية حساب مساحة مثلث عُلِمَ فيه أطوال أضلاعه الثلاثة.

مثال 2

أجد مساحة المثلث ABC في الشكل المجاور.

يتعين أولاً إيجاد قياس إحدى الزوايا باستعمال قانون جيب التمام، ثم حساب المساحة. إذن، أستعمل قانون جيب التمام لإيجاد قياس الزاوية C :

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

قانون جيب التمام

$$= \frac{13^2 + 19^2 - 8^2}{2 \times 13 \times 19}$$

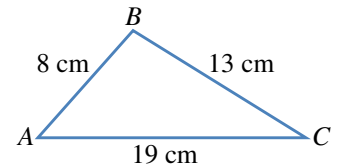
بالتعويض

$$= 0.9433$$

باستعمال الآلة الحاسبة

$$C = \cos^{-1} 0.9433 = 19.4^\circ$$

معكوس \cos ، واستعمال الآلة الحاسبة



أطبّق قانون المساحة:

$$K = \frac{1}{2} ab \sin C$$

$$= \frac{1}{2} \times 13 \times 19 \times \sin 19.4^\circ$$

$$= 41.0 \text{ cm}^2$$

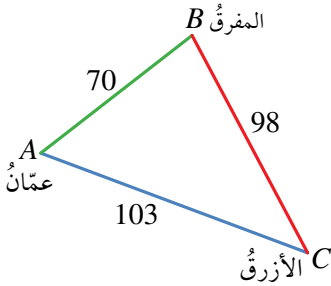
قانون مساحة المثلث

بالتعويض

باستعمال الآلة الحاسبة

أتحقق من فهمي

أجد مساحة المثلث DEF ، علماً بأن $DE = 10 \text{ cm}$ و $DF = 12 \text{ cm}$ و $EF = 9 \text{ cm}$.



مثال 3: من الحياة

المسافة بين عمّان والأزرق 103 km، وبين عمّان والمفرق 70 km، وبين المفرق والأزرق 98 km. أجد مساحة المثلث الذي تقع عند رؤوسه هذه المدن الثلاث.

الخطوة 1: إيجاد قياس إحدى الزوايا، ولتكن B ، باستعمال قانون جيب التمام.

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$= \frac{98^2 + 70^2 - 103^2}{2 \times 98 \times 70}$$

$$= 0.2839$$

قانون جيب التمام

بالتعويض

باستعمال الآلة الحاسبة

$$B = \cos^{-1}(0.2839) = 73.5^\circ$$

معكوس جيب التمام، واستعمال الآلة الحاسبة

الخطوة 2: تطبيق قانون المساحة.

$$K = \frac{1}{2} ac \sin B$$

$$= \frac{1}{2} \times 98 \times 70 \times \sin 73.5^\circ$$

$$= 3288.8 \text{ km}^2$$

قانون مساحة المثلث

بالتعويض

باستعمال الآلة الحاسبة

أتحقق من فهمي

قطعة رخام مثلثة الشكل، أبعادها: 50 cm، و 85 cm، و 70 cm. ما مساحتها؟

التخزين في ذاكرة الآلة الحاسبة

أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قياس الزاوية B في هذا السؤال، ثم أضغط على الأزرار (بالترتيب من اليسار):
SHIFT → RCL → B
فُتحفظ الزاوية في الذاكرة. ولاستعمالها في حساب مساحة المثلث، أدخل:
 $\frac{1}{2} \times 98 \times 70 \times$
ثم أضغط على الأزرار:
sin → ALPHA → B → =
تظهر النتيجة: 3288.8



أجد مساحة كل من المثلثات الآتية:

1 المثلث ABC الذي فيه $BC = 7$ cm، و $AC = 8$ cm، وقياس الزاوية ACB فيه 59° .

2 المثلث ABC الذي قياس الزاوية BAC فيه 85° ، و $AC = 6.7$ cm، و $AB = 8$ cm.

3 المثلث PQR الذي فيه $QR = 27$ cm، و $PR = 19$ cm، وقياس الزاوية QRP فيه 109° .

4 المثلث XYZ الذي فيه $XY = 231$ cm، و $XZ = 191$ cm، وقياس الزاوية YXZ فيه 73° .

5 المثلث LMN الذي فيه $LN = 63$ cm، و $LM = 39$ cm، وقياس الزاوية NLM فيه 85° .

6 إذا كانت مساحة المثلث ABC هي 27 cm²، و $BC = 14$ cm، وقياس الزاوية BCA فيه 115° ، فما طول AC ؟

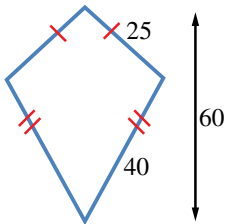
7 إذا كانت مساحة المثلث LMN هي 133 cm²، و $LM = 16$ cm، و $MN = 21$ cm، والزاوية LMN حادة، فما

قياس كل من الزاويتين: LMN ، و MNL ؟

8 لوحة على شكل مثلث، أطوال أضلاعه: 60 cm، و 70 cm، و 80 cm. أجد مساحة اللوحة.

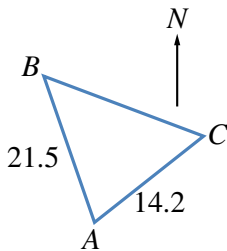
9 دائرتان، مركز إحداهما P ومركز الأخرى Q ، وطول نصف قطر إحداهما 6 cm والأخرى 7 cm. إذا تقاطعتا في

النقطتين X و Y ، وكان $PQ = 9$ cm، فما مساحة المثلث PXQ ؟



10 طائرة ورقية: صنع سليم طائرة ورقية كما في الشكل المجاور. أجد مساحة المادة

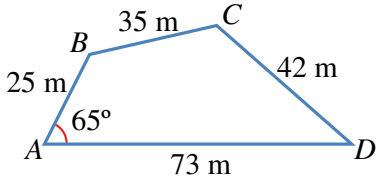
اللازمة لصنع الطائرة بالوحدات المربعة.



11 مُتَنزَّهٌ وطني: يراد إنشاء مُتَنزَّهٍ وطني على قطعة أرضٍ مثلثة الشكل ABC . إذا كانت

النقطة B في اتجاه 324° من النقطة A ، والنقطة C في اتجاه 042° من النقطة A ، فما

مساحة المُتَنزَّه بالوحدات المربعة؟



حقول: يُمثل الشكل المجاور أبعاد حقلٍ رباعيّ الأضلاع:

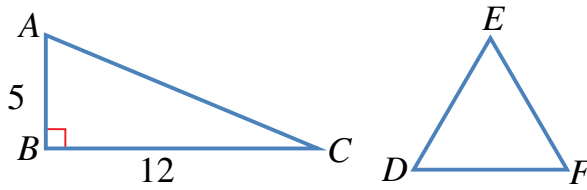
12 أثبت أن طول BD هو 66 m ، مُقرباً إيجابياً إلى أقرب مترٍ.

13 أجد قياس الزاوية C .

14 أحسب مساحة الحقل.

15 أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

16 المثلث ABC قائم الزاوية، والمثلث DEF مُتطابق الأضلاع وللمثلثين المحيط نفسه. أجد مساحة المثلث DEF .



17 **جغرافيا:** برمودا منطقة مثلثة الشكل، تقع في الجزء الغربي من المحيط الأطلسي، رؤوسها مدينة ميامي، وبرمودا،

وسان خوان. وقد شهد مثلث برمودا وقوع عددٍ من حوادث اختفاء السفن والطائرات. إذا كانت المسافة بين ميامي

وسان خوان 1674 km تقريباً، وبين ميامي وبرمودا نحو 1645 km، وبين سان خوان وبرمودا قرابة 1544 km، فما

مساحة مثلث برمودا من دون اعتبار لتقوس الأرض؟

مهارات التفكير العليا



18 **تحذ:** أجد مساحة المثلث ABC الذي قياس الزاوية A فيه 70° ، وقياس الزاوية B فيه 60° ، وطول الضلع AB فيه

4 cm.

19 **أكتشف الخطأ:** ABC مثلث فيه $BC = 8$ cm، $AB = 9$ cm، وقياس الزاوية A فيه 30° . أرادت نور إيجاد مساحته

إلى أقرب عُشرٍ، فكان حلها كما يأتي:

$$K = \frac{1}{2} \times 8 \times 9 \sin 30^\circ$$

$$= 18 \text{ cm}^2$$

أكتشف الخطأ في حل نور، ثم أصححه.

حل مسائل ثلاثية الأبعاد Solving Problems in Three Dimensions

إيجاد أطوال وقياسات لزوايا مجهولة في أشكال ثلاثية الأبعاد باستعمال نظرية فيثاغورس والنسب المثلثية.

فكرة الدرس



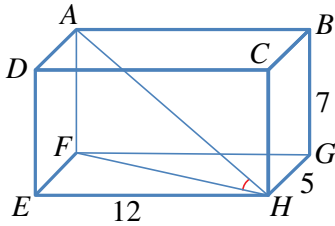
مسألة اليوم



شيد الهرم الأكبر في مدينة الجيزة بمصر عام 2500 قبل الميلاد تقريبًا، وتمثل قاعدته مربعًا طول ضلعه 232.6 m، وطول الضلع الواصل بين قمة الهرم وأي من رؤوس المربع 221.2 m. أجد ارتفاع هذا الهرم.

تتمثل المسائل ثلاثية الأبعاد (في الفضاء) على ثلاثة مستويات؛ أفقي، ورأسي، ومائل. ويتطلب حل هذه المسائل رسم مخطط يوضح المسألة، ويمثل المعلومات المعطاة فيها، ثم البحث عن مثلثات قائمة الزاوية فيها. وإذا لم توجد هذه المثلثات، فإننا نرسم بعضًا بحيث تكون بعض عناصرها معلومة، فضلًا عن تحديد العنصر المطلوب إيجادها؛ على أن نرسم كلاً منها بمنأى عن المخطط المذكور آنفًا، ليسهل علينا معرفة العلاقة التي نستخدمها في الحل.

مثال 1



يمثل الشكل المجاور متوازي مستطيلات. أجد قياس الزاوية AHF ، مقربًا إجابتي إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

المثلث AFH قائم الزاوية في F ، ومعلوم فيه طول AF ؛ لذا يجب معرفة عنصر آخر لإيجاد القياس المطلوب.

الخطوة 1: إيجاد طول FH من المثلث قائم الزاوية FEH ؛ المرسوم وحده جانبًا.

$$(FH)^2 = (EF)^2 + (EH)^2$$

$$= 5^2 + 12^2$$

$$(FH)^2 = 169$$

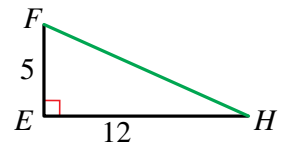
$$FH = \sqrt{169} = 13$$

نظرية فيثاغورس

بالتعويض

بالتبسيط

بحساب الجذر التربيعي للطرفين

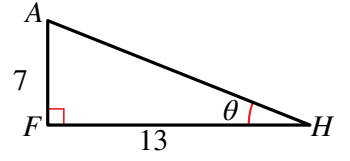


الخطوة 2: رسم المثلث AFH وحده، ثم استعمال الظل (\tan) لإيجاد قياس الزاوية AHF .

$$\tan \theta = \frac{7}{13} = 0.5385$$

$$\theta = \tan^{-1} (0.5385) = 28.3^\circ$$

بالتقريب إلى منزلة عشرية واحدة



أتحقق من فهمي

أجد BE ، وقياس الزاوية EBG في المثال السابق.

يمكن نمذجة كثير من المواقف الحياتية باستعمال المثلثات، ثم إيجاد قياسات مجهولة فيها باستعمال النسب المثلثية.

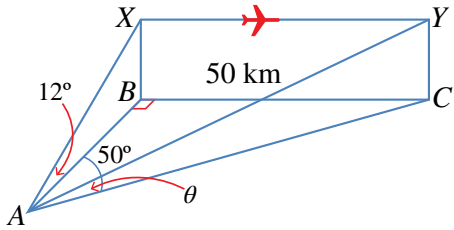
مثال 2: من الحياة



تقع النقاط A ، B ، و C في مستوى أفقي واحد على الأرض، وتقع النقطة C على بُعد 50 km شرقي النقطة B التي تقع شمالي النقطة A ، وتقع النقطة C في اتجاه 050° من النقطة A . رُصدت من النقطة A حركة طائرة في موقعين مختلفين على الارتفاع نفسه عن الأرض؛ الأول: عندما كانت فوق النقطة B مباشرة، وكانت زاوية ارتفاعها 12° . والثاني: عندما كانت فوق النقطة C . أجد زاوية ارتفاع الطائرة عندما كانت فوق النقطة C .

أتذكر

تسمى الزاوية المحصورة بين خط البصر والخط الأفقي المار بعين الناظر زاوية الارتفاع.



الخطوة 1: أرسم مخططاً يمثّل المعلومات المعطاة.

الخطوة 2: أرسم المثلث قائم الزاوية ABC ، ثمّ أستخدمه في إيجاد AB ، و AC .

$$\tan 50^\circ = \frac{50}{AB}$$

$$AB = \frac{50}{\tan 50^\circ} = 41.95 \text{ km}$$

$$\sin 50^\circ = \frac{50}{AC}$$

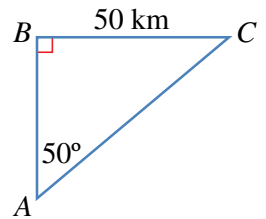
$$AC = \frac{50}{\sin 50^\circ} = 65.27 \text{ km}$$

تعريف ظل الزاوية

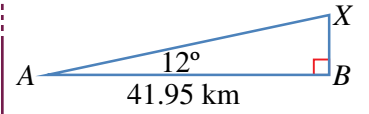
باستعمال الآلة الحاسبة

تعريف جيب الزاوية

باستعمال الآلة الحاسبة



الخطوة 3: أرسم المثلث قائم الزاوية ABX ، ثم أستخدمه في إيجاد BX ، ومنه يمكن إيجاد CY ، فهما متساويان؛ لأن الشكل $BXYC$ مستطيل.



$$\tan 12^\circ = \frac{BX}{41.95}$$

تعريف ظل الزاوية

$$BX = 41.95 \tan 12^\circ = 8.917 \text{ km}$$

باستعمال الآلة الحاسبة

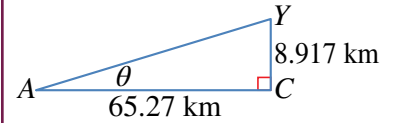
الخطوة 4: أستخدم المثلث قائم الزاوية ACY لإيجاد زاوية الارتفاع θ .

$$\tan \theta = \frac{8.917}{65.27} = 0.1366$$

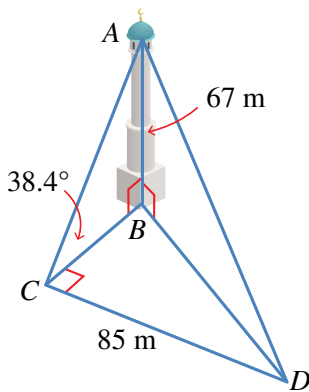
تعريف ظل الزاوية

$$\theta = \tan^{-1} 0.1366 = 7.8^\circ$$

معكوس الظل



إذن، زاوية ارتفاع الطائرة عندما كانت فوق النقطة C هي: 7.8° ، مُقرَّبةً إلى منزلة عشرية واحدة.

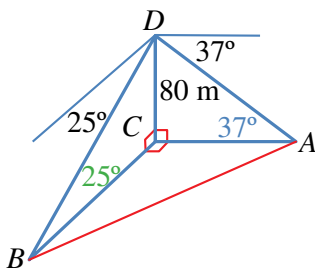


أتحقق من فهمي

رصد أحمد قمة مئذنة من نقطة على الأرض تقع جنوب المئذنة، فكانت زاوية ارتفاعها 38.4° ، ثم سار شرقاً مسافة 85 m ، ورصد قمة المئذنة مرةً أخرى. إذا كان ارتفاع المئذنة 67 m ، أجد زاوية ارتفاع قمة المئذنة في المرة الثانية.

مثال 3: من الحياة

رُصد المنزل A في اتجاه الشرق من قمة برج يرتفع 80 m ، وكذلك المنزل B في اتجاه الجنوب. إذا كانت زاوية انخفاض المنزل A من قمة البرج 37° ، وزاوية انخفاض المنزل B من قمته 25° ، فما المسافة بين المنزلين؟



الخطوة 1: أرسم مُخطَّطاً، علماً بأنَّ البرج DC يصنع زاوية قائمة مع الأرض، وأنَّ اتجاه كلٍّ من الشرق والجنوب يصنعان معاً زاوية قائمة.

بما أن زاوية انخفاض المنزل A هي 37° ، فإن الزاوية DAC هي 37° ، وبما أن زاوية انخفاض المنزل B هي 25° ، فإن الزاوية DBC هي 25° .

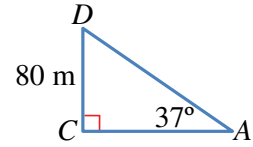
الخطوة 2: أستخدم المثلث قائم الزاوية ABC لإيجاد AB ، وهذا يُحتم معرفة AC ، و BC .

الخطوة 3: أرسم المثلث ADC . ولإيجاد AC ، أستخدم ظل الزاوية 37° .

$$\tan 37^\circ = \frac{80}{AC} \quad \text{تعريف ظل الزاوية}$$

$$AC = \frac{80}{\tan 37^\circ} \quad \text{بالتبسيط}$$

$$AC = 106.2 \text{ m} \quad \text{باستعمال الآلة الحاسبة}$$

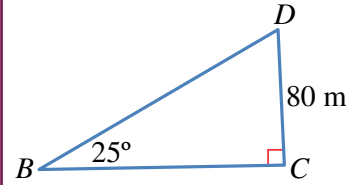


الخطوة 4: أرسم المثلث BCD . ولإيجاد BC ، أستخدم ظل الزاوية 25° .

$$\tan 25^\circ = \frac{80}{BC} \quad \text{تعريف ظل الزاوية}$$

$$BC = \frac{80}{\tan 25^\circ} \quad \text{بالتبسيط}$$

$$BC = 171.6 \text{ m} \quad \text{باستعمال الآلة الحاسبة}$$



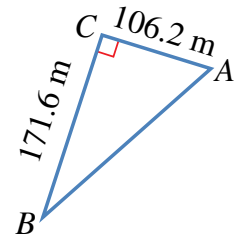
الخطوة 5: أستخدم نظرية فيثاغورس في المثلث ACB لإيجاد AB .

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 \quad \text{نظرية فيثاغورس}$$

$$= (106.2)^2 + (171.6)^2 = 40725 \quad \text{بالتعويض}$$

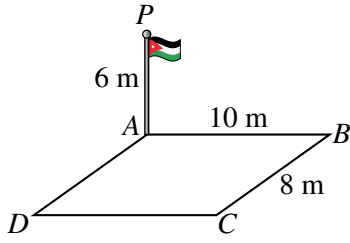
$$AB = \sqrt{40725} = 201.8 \quad \text{بأخذ الجذر التربيعي}$$

إذن، المسافة بين المنزلين هي: 201.8 m ، مُقَرَّبَةً إلى أقرب منزلة عشرية واحدة.

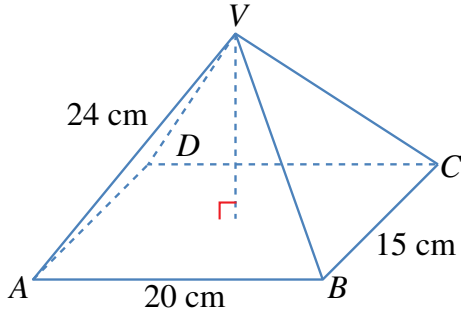


أتحقق من فهمي

أبحرت السفينتان A و B من الميناء P في اتجاهين مُتعامدين. وقد رصدت طائرة عمودية تُحلّق فوق الميناء هاتين السفينتين في اللحظة نفسها، فكانت زاوية انخفاض السفينة A هي 40° ، وزاوية انخفاض السفينة B هي 54° . إذا كان ارتفاع الطائرة عن سطح البحر 600 m ، فما المسافة بين السفينتين لحظة رصدهما؟

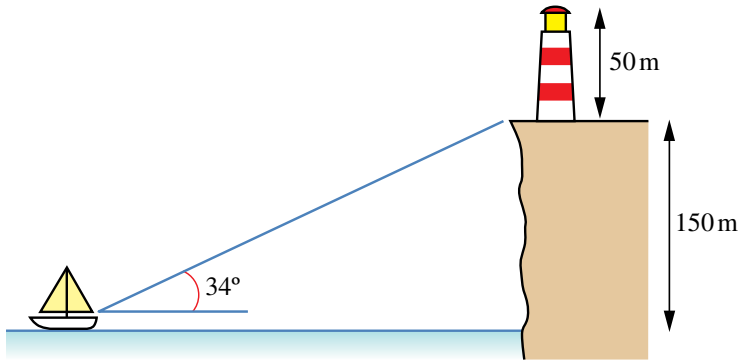


- 1 سارية العَلَم: نُصِبَتْ ساريةٌ عَلَمٍ عمودياً عند رُكنِ ساحةٍ مستطيلة الشكل $ABCD$. أجدُ زاويةَ ارتفاعِ قَمَّةِ السارية P من النقطة C .



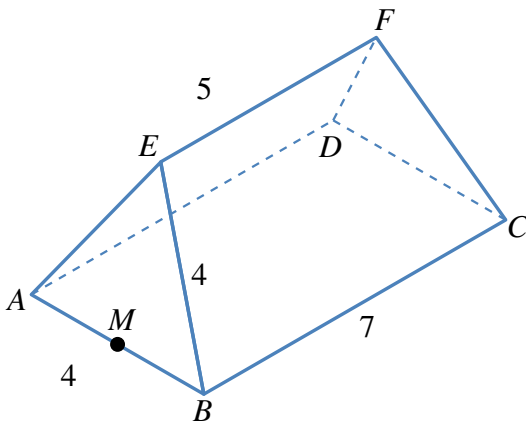
- يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ هرمًا قائمًا قاعدته $ABCD$ مستطيلة الشكل، بُعْداهَا: 20 cm ، و 15 cm . إذا كان طوُلُ كلِّ من الأحرَفِ الواصلةِ بين قَمَّةِ الهرمِ ورؤوسِ القاعدةِ 24 cm ، وكانتِ القمَّةُ V تقعُ رأسيًّا فوقَ مركزِ القاعدةِ المستطيلةِ، فأجدُ:

- 2 طوُلُ القُطرِ AC .
3 قياسَ الزاويةِ VAC .
4 ارتفاعَ الهرمِ.



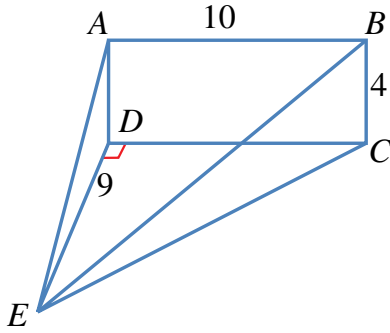
- 5 منارةٌ: شاهدَ صيَّادٌ من قاربه قاعدةَ منارةٍ على حافةٍ صخريةٍ بزاويةٍ ارتفاعٍ قياسها 34° . إذا كان ارتفاعُ قاعدةِ المنارةِ عن مستوى عينيِّ الصيَّادِ 150 m ، فكم يبعدُ الصيَّادُ عن هذه القاعدةِ؟

- 6 إذا كان ارتفاعُ المنارةِ 50 m ، فما زاويةُ ارتفاعِ نظريِّ الصيَّادِ نحوَ قَمَّةِ المنارةِ؟



- يُمثِّلُ الشكلُ المجاورُ سقفَ بنايةٍ، قاعدتهُ المستطيلُ الأفقيُّ $ABCD$ الذي بُعْداهَا: 7 m ، و 4 m . وتُمثِّلُ نهايتا السقفِ مثلثينِ متطابقينِ الأضلاعِ، في حينِ يُمثِّلُ كلُّ من جانبيِّ السقفِ شبهَ منحرفٍ متطابقٍ الساقينِ. إذا كان طوُلُ الحافةِ العلويةِ EF هو 5 m ، فأجدُ:

- 7 طوُلُ EM ، حيثُ M نقطةُ منتصفِ AB .
8 قياسَ الزاويةِ EBC .
9 قياسَ الزاويةِ بينِ EM والقاعدةِ $ABCD$.



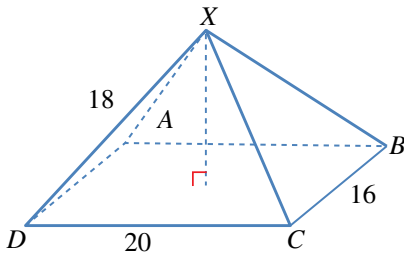
$ABCD$ مستطيلٌ رأسيٌّ، و EDC مثلثٌ أفقيٌّ. إذا كانَ قياسُ الزاوية CDE هو 90° ، و $AB = 10 \text{ cm}$ ، و $BC = 4 \text{ cm}$ ، و $ED = 9 \text{ cm}$ ، فأجِد:

10 قياسُ الزاوية AED .

11 قياسُ الزاوية DEC .

12 طول \overline{EC} .

13 قياسُ الزاوية BEC .



14 يُمثِّل الشكلُ المجاورُ الهرمَ $XABCD$ الذي لهُ قاعدةٌ مستطيلةٌ الشكلِ.

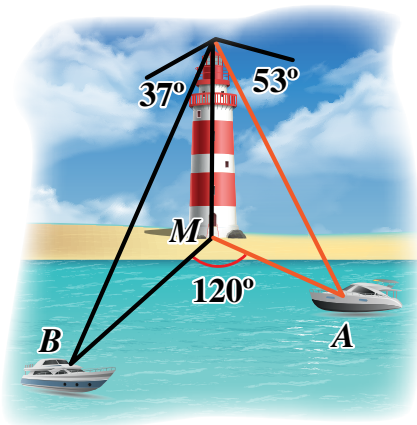
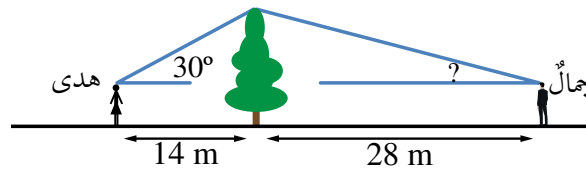
أجِدْ قياسَ الزاوية بينَ الحافةِ XD وقُطرِ القاعدةِ DB .

15 أحلَّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

مهارات التفكير العليا



16 **أكتشف الخطأ:** تقفُ هدى على بُعدِ 14 m غربيَّ شجرةٍ، زاويةُ ارتفاعِ قمَّتها بالنسبةِ إليها 30° ، ويقفُ جمالٌ على بُعدِ 28 m شرقيَّ الشجرة، وهو يرى أن زاويةَ ارتفاعِ قمَّةِ الشجرة بالنسبةِ إليه يجبُ أن تكونَ 15° ؛ لأنَّهُ يبعدُ عن الشجرةِ مثليَّ المسافةِ التي تبعدُها هدى. هل رأيُ جمالٍ صحيحٌ؟ إذا لم يكنْ رأيُّه صحيحًا، فما زاويةُ الارتفاعِ؟



17 **تحذّر:** رُصدَ القاربانِ A و B في البحرِ من قَمَّةِ منارةٍ على الشاطئِ،

ارتفاعُها 44 m، في اللحظةِ نفسِها، فكانتْ زاويةُ انخفاضِ القاربِ A

هي 53° ، وزاويةُ انخفاضِ القاربِ B هي 37° ، وقياسُ الزاويةِ AMB

هو 120° ، حيثُ M قاعدةُ المنارةِ. أجدُ المسافةَ بينَ القاربينِ.

4 إحدى الصيغ الآتية تُستعمل لإيجاد مساحة المثلث ABC :

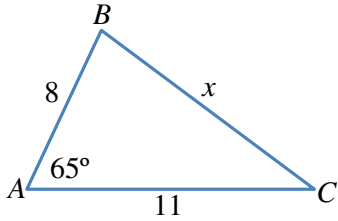
- a) $\frac{1}{2} bc \sin C$ b) $\frac{1}{2} ab \sin C$
 c) $\frac{1}{2} ab \sin A$ d) $\frac{1}{2} ab \sin B$

5 إذا كان اتجاه النقطة R من النقطة Z هو 070° ، فإنَّ اتجاه النقطة Z من النقطة R هو:

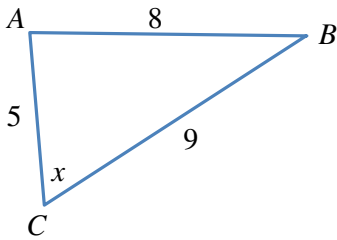
- a) 070° b) 110°
 c) 250° d) 290°

أجد قيمة x في كلِّ من المثلثات الآتية:

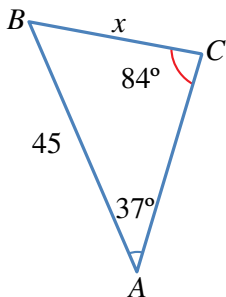
6



7



8



أختار رمز الإجابة الصحيحة لكلِّ مما يأتي:

1 يُمكن حلُّ المثلث إذا عُلِّمَت جميع زواياه باستعمال:

(a) قانون الجيوب فقط. (b) قانون جيب التمام فقط.

(c) قانوني الجيوب (d) لا يُمكن حلُّ المثلث و جيوب التمام معاً. في هذه الحالة.

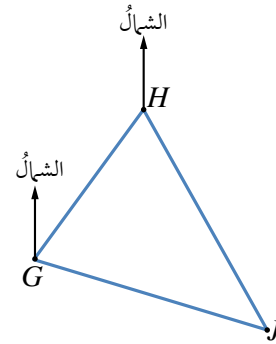
2 يُمكن حلُّ المثلث إذا عُلِّمَت جميع أضلاعه باستعمال:

(a) قانون الجيوب فقط. (b) قانون جيب التمام فقط.

(c) قانوني الجيوب (d) لا يُمكن حلُّ المثلث و جيوب التمام معاً. في هذه الحالة.

3 إذا كان اتجاه النقطة H من النقطة G في الشكل الآتي

هو 045° ، واتجاه النقطة J من النقطة H هو 164° ، فإنَّ قياس الزاوية GHI هو:



a) 16°

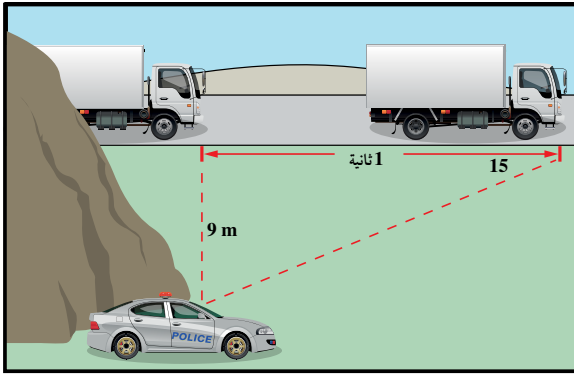
b) 045°

c) 29°

d) 61°

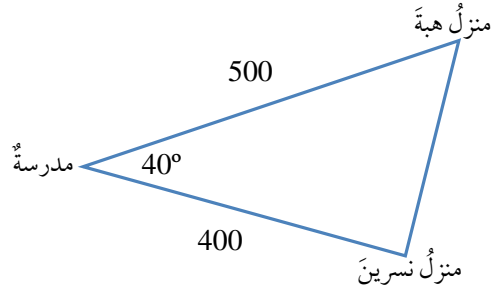
16 **موانئ:** أبحرت سفينة من الميناء P باتجاه الغرب مسافة 16 km ، ثم تحوّلت إلى اتجاه الجنوب، وقطعت مسافة 9 km حتى وصلت الميناء S . أجد اتجاه الميناء S من الميناء P .

17 **رادار:** رصد رادار شاحنة بعد ثانية من مرورها بمحاذاة، فصنع الخطّ الواصل بين الرادار والشاحنة وحافة الطريق زاوية مقدارها 15° كما في الشكل الآتي. أجد سرعة الشاحنة بوحدة km/h .

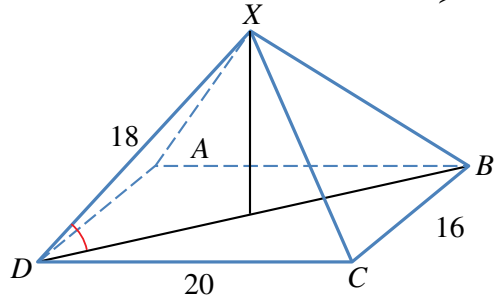


18 **عواصف بحرية:** أبحرت سفينة من الميناء A بسرعة 28 km/h متوجهة إلى الميناء B على بُعد 1100 km شرق الميناء A . ولتجنب العواصف الشديدة التي هبت عند انطلاق السفينة؛ فقد سلك القبطان مسارًا ينحرف 20° جنوبًا عن خطّ الملاحة المباشر بين الميناءين حتى هدأت العواصف بعد إبحار استمر 10 ساعات. كم تبعد السفينة عن الميناء B بعد هذه المدة من الإبحار؟ ما قياس الزاوية الذي سيجعل السفينة تتوجّه مباشرة إلى الميناء B ؟

9 يبعد منزل نسرين عن المدرسة مسافة 400 m ، ويبعد منزل هبة عن المدرسة نفسها مسافة 500 m ، كما في الشكل الآتي. أجد المسافة بين منزلَيْهما.

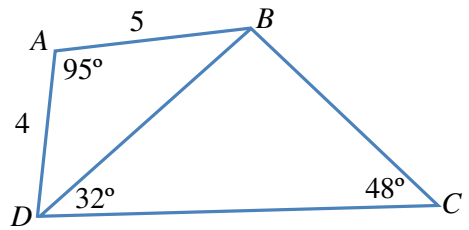


10 أجد قياس الزاوية بين الحافة XD وقاعدة الهرم في الشكل الآتي.



11 إذا كانت مساحة المثلث PQR هي 68 cm^2 ، وكان $PQ = 18 \text{ cm}$ ، $RQ = 15 \text{ cm}$ ، فما قياس الزاوية الحادة PQR ؟

بالاستعانة بالشكل الآتي، أجد:



12 طول \overline{DB} . 13 قياس الزاوية DBC .

14 طول \overline{CD} . 15 مساحة الشكل الرباعي $ABCD$.

$ABCD$.

